3/6/08

דיפרנציאלית - פרק VI 2,3

נניח $f(t)$ מסילה חלקה. כלומר $\dot f(t)\neq 0$ לכל t

$f(s)$	f	$f(t)$
פרמטר האורך		פרמטר הזמן
$f'(s)$		$\dot f(t)$

באופן כללי: $f:[\ \ ]\longrightarrow R^3$

$f([\ \ ])\subseteq \underset{\text{פתוחה}}{U}\subseteq R^3$.

$e: U\longrightarrow \left\{\begin{array}{l} R \\ \text{או} \\ R^3\end{array}\right.$

גזירה ברציפות

נרצה למצוא את $\dot e(t)$.

$$\dot e(t)=\frac{de}{dt}=\frac{de}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=e'(s)\cdot\dot s=e'\cdot\dot s=\dot s\cdot e'$$

$$\dot s=\|\dot f\|=(\dot f_1^{\,2}+\dot f_2^{\,2}+\dot f_3^{\,2})^{1/2}$$

$$\dot f=\dot s\cdot f'=\dot s T$$

<u>סימונים</u>: $T=f'=\dfrac{\dot f}{\|\dot f\|}$ (נורמה 1)

הנורמלי $N=\dfrac{f''}{\kappa}=\dfrac{f''(s)}{\kappa(s)}$

כאשר $\kappa=\|f''\|$

$$\dot T=\dot s\cdot T'=\dot s\kappa N$$

הערה: נוסחה עבור κ.

$$\ddot f=\ddot s\cdot f'+\dot s\dot T=\ddot s T+\dot s\dot T=\ddot s T+(\dot s)^2\kappa N \quad (*)$$

$$\Rightarrow\quad T\times\ddot f=0+(\dot s)^2\kappa\, T\times N$$

$$\Rightarrow\quad \|T\times\ddot f\|=\|(\dot s)^2\kappa\, T\times N\|$$

$$\Rightarrow\quad \|T\times\ddot f\|=(\dot s)^2\kappa$$

$$\left\|\frac{\dot f\times\ddot f}{\|\dot f\|}\right\|=(\dot s)^2\kappa$$

$$\Rightarrow\quad \kappa=\frac{\|\dot f\times\ddot f\|}{(\dot s)^3}$$

$(\dot s=\|\dot f\|)$

אם f מישורי אז

$$f=(f_1,f_2,0)$$
$$\dot f=(\dot f_1,\dot f_2,0)$$
$$\ddot f=(\ddot f_1,\ddot f_2,0)$$

$$\dot f\times\ddot f=\det\begin{pmatrix}\dot f_1 & \dot f_2\\ \ddot f_1 & \ddot f_2\end{pmatrix}\cdot e_3 \qquad \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ \dot f_1 & \dot f_2 & \dot f_3\\ \ddot f_1 & \ddot f_2 & \ddot f_3\end{vmatrix} \quad \dot f_3=\ddot f_3=0$$

$$\Rightarrow \|\dot f\times\ddot f\|=|\dot f_1\ddot f_2-\dot f_2\ddot f_1|$$

לכן במקרה בו f מישורי

$$\varkappa=\frac{|\dot f_1\ddot f_2-\dot f_2\ddot f_1|}{(\dot f_1^2+\dot f_2^2)^{3/2}}$$

הנחה $\varkappa\neq 0 \iff \dot f,\ddot f$ בת"ל
$\Leftarrow span(\dot f,\ddot f)=span(T,N)$

<u>מושג</u>: הוקטור הבינורמלי: $B:=T\times N$

<u>הערה</u>: B מוגדר באופן חד משמעי ע"י הדרישה (T,N,B) היא מערכת אורתונורמלית וימנית.

<u>מסקנה</u>: $V=\frac{\dot f\times\ddot f}{\|\dot f\times\ddot f\|}\overset{?}{=}B$ כי $\dot f\times\ddot f$ ניצב גם ל T וגם ל N.

ברור ש $\|B\|=1$.

צ"ל: $\det(T,N,V)>0$ $\qquad 0<\det(\dot f,\ddot f,\dot f\times\ddot f)$

$T=\frac{\dot f}{\dot s}$ מספר חיובי

N תלוי ב $\ddot f$

כי $N=\frac{\ddot f-\ddot s T}{\text{חיובי}}$ (N בצורה קודמת)

(ולכן ב det בגלל תלוי עם עמודה הראשונה
מוסיף להתלוי ב $\dot f$)
הסימן לא ישתנה.

לכן מספיק להוכיח $\det(\dot f,\ddot f,\dot f\times\ddot f)>0$

אבל זה ידוע כבר. ∎

$$N=B\times T=\frac{(\dot f\times\ddot f)\times\dot f}{\|\dot f\times\ddot f\|\cdot\|\dot f\|}$$

4/6/08

Frenet frame

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

(*) **הנחה:** f חלקה, גזירה 3 פעמים (ברציפות) ובעלת עקמומיות חיובית (לא מתאפסת) בכל נקודה.

$$M = \begin{pmatrix} \langle T',T\rangle, & \langle T',N\rangle, & \langle T',B\rangle \\ \langle N',T\rangle, & \langle N',N\rangle & \langle N',B\rangle \\ \langle B',T\rangle, & \langle B',N\rangle & \langle B',B\rangle \end{pmatrix}$$

הערה:

כל איבר במט' M הוא מהצורה $\langle X',Y\rangle$ כאשר

$X,Y \in \{T,N,B\}$

טענה: M מטריצה אנטיסימטרית ז"א $\langle X',Y\rangle = -\langle Y',X\rangle$ לכל X,Y

לכן $\langle X(s),Y(s)\rangle \equiv \begin{cases} 0 & X\neq Y \\ 1 & X=Y \end{cases}$

$$\langle X',Y\rangle + \langle Y',X\rangle = \frac{d}{ds}\langle X,Y\rangle \equiv 0$$

$(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ מערכת אורתונורמלית ב-R^n אז לכל $v\in R^n$

$$v = \sum_{j=1}^{n} \langle v, v_j\rangle v_j$$

$$N = \frac{f''(s)}{\|f''(s)\|} = \frac{T'}{\kappa} \qquad \begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

Frenet eqn

$\Rightarrow T' = \kappa N$

הגדרה:

בהנחה (*) מגדירים $\tau = \langle N',B\rangle$, הפיתול של f בנקודה s.

הכוונה $\tau(s) = \langle N'(s), B'(s)\rangle$

ואם לא מתקיים לא אומרים ש-f בעלת פיתול ב-s.

$\kappa = \frac{\|\dot{f}\times\ddot{f}\|}{(\dot{s})^3}$

$\dot{\varphi} = \dot{s}\varphi' = \|\dot{f}\|\cdot\varphi'$

$B = \frac{\dot{f}\times\ddot{f}}{\|\dot{f}\times\ddot{f}\|}$

נוסחא:

$$\ddot{f} = \ddot{s}T + (\dot{s})^2\kappa N$$

$$\dddot{f} = \dddot{s}T + \ddot{s}\dot{s}\kappa N + 2\dot{s}\ddot{s}\kappa N + (\dot{s})^2\dot{\kappa}N + \underbrace{(\dot{s})^3\kappa N'}_{\substack{\| \\ (\dot{s})^3\kappa(-\kappa T + \tau B)}}$$

מכפילים סקלרית ב-B:

$$\frac{\langle \dot{f}\times\ddot{f}, \dddot{f}\rangle}{\|\dot{f}\times\ddot{f}\|} = \langle B, \dddot{f}\rangle = (\dot{s})^3\kappa^2\tau = \|\dot{f}\times\ddot{f}\|\,\tau$$

$$\det(\dot f,\ddot f,\dddot f) \longrightarrow \tau=\frac{\langle \dot f,\ddot f,\dddot f\rangle}{\|\dot f\times \ddot f\|^2}$$

משפט: נניח ש-f בעלת פיתול בכל נקודה.
$\tau\equiv0$ אמ"מ f מסילה מישורית, כלומר קיים $0\neq b\in R^3$ כך ש
$\langle f(s),b\rangle=\underset{\text{קבוע}}{c}$ לכל s. $(**)$

הוכחה

כיוון אחד $\Rightarrow$

$$\langle T(s),b\rangle=\langle f'(s),b\rangle=\frac{d}{ds}\langle f(s),b\rangle=0$$

גוזרים עוד פעם.

$$\langle N(s),b\rangle=0 \Leftarrow \underbrace{k(s)}_{\neq 0}\cdot\langle N(s),b\rangle=\langle T'(s),b\rangle=0$$

$\Leftarrow$ $b=\alpha\cdot B$ $\alpha\neq0$.

גוזרים עוד פעם: $\alpha^{-1}\langle N'(s),b\rangle=0$

$\langle T_n(s),b\rangle$ $\tau(s)=\langle N'(s),B\rangle$

$\Leftarrow$ מניחים $\tau=0$, צ"ל שקיים $0\neq b\in R^3$ כך ש $\langle f'(s),b\rangle\equiv0$

$\Downarrow$ $\quad\|$

$\langle T(s),B(s)\rangle \longleftarrow$ $B(s)\equiv b$ קיים b כך ש $\Leftarrow$ $B'(s)=0$

מושג $A\subseteq R^n$ קבוצה, $f:[a,b]\to R^n$, $t_0\in(a,b)$ אומרים ש-A ול-f
יש מגע מסדר k ב-t_0 אם $d(f(t),A)=$
$=o(|f(t)-f(t_0)|^k)$

צ"ל $\lim_{t\to t_0}\left(\frac{d(f(t),A)}{\|f(t)-f(t_0)\|^k}\right)=0$

זו ההגדרה יחידה $d(x,A)=\inf\{\|x-y\|:y\in A\}$

כאשר A סגורה אז $\inf=\min$, צ"ל
קיים $y\in A$ כך ש $d(x,A)=\|x-y\|$.
כאשר A סגורה אז $f(t_0)\in A$

__הערה 1:__ אם f חלקה אזי $\lim_{t\to t_0}\frac{d(f(t),A)}{|t-t_0|^k}=0$

כי נניח $f(t)-f(t_0)=(t-t_0)\cdot f'(t_0)+$ עבור t מספיק קרובים ל t_0

$$\frac{1}{2}|t-t_0|\,\|f'(t_0)\|\le\|f(t)-f(t_0)\|\le\frac{3}{2}|t-t_0|\cdot\|f'(t_0)\|$$

__הערה 2:__ תהיינה g,f מסילות חלקיות שקולות. $f(t)=g(\varphi(t))$

אזי אם ל-f ול-A יש מגע מסדר k ב-t_0 אזי ל-g ול-A יש מגע מסדר k ב $u_0=\varphi(t_0)$.

$u_n=\varphi(t_n)\to u_0=\varphi(t_0)$, $|u_n-u_0|\ge|t_n-t_0|\cdot \underset{\text{קבוע חיובי}}{c}$ כי φ חלקה.

$$\frac{d(g(u_n),A)}{|u_n-u_0|^k}\le\frac{d(f(t_n),A)}{c^k|t_n-t_0|^k}\longrightarrow 0$$

__דוגמא:__ אם ψ פונקציה גזירה $k+1$ פעמים ברציפות ב-(a,b). אזי לכל $t\in(a,b)$ לגרף של ψ ולגרף של $P_k(t)=\sum_{j=0}^{k}\frac{f^{(j)}(t_0)(t-t_0)^j}{j!}$ יש מגע מסדר k.

__משפט:__ תהי f מסילה בעלת עקמומיות $\neq 0$ ב-t_0. אזי:

(א) למישור המשיק ל-f ב-t_0 ול-f יש מגע מסדר 2 ב-t_0.

(ב) יחידות: רק למישור הזה יש התכונה הנ"ל.

__הוכחה:__

(א) לפי נוסחאת טיילור

$$f(t)=f(t_0)+(t-t_0)\dot f(t_0)+\frac{1}{2}(t-t_0)^2\cdot\ddot f(t_0)+\overbrace{o((t-t_0)^2)}^{r(t)}$$

$\lim_{t\to t_0}\frac{r(t)}{(t-t_0)^2}=0$

תהי P ההטלה הניצבת של R^3 על A: $(A=f(t_0)+\mathrm{span}(\dot f(t_0),\ddot f(t_0)))$

(P מקיימת את תנאי ליפשיץ: כלומר $\|Px-Py\|\le\|x-y\|$)

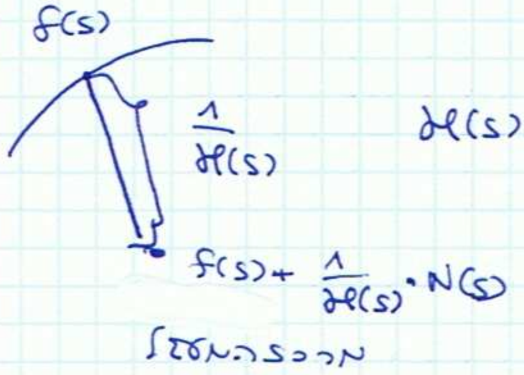
$$P_{f(t)}=f(t_0)+(t-t_0)\cdot\dot f(t_0)+\frac{1}{2}(t-t_0)^2\ddot f(t_0)+P_{r(t)}$$

צ"ל $\|f(t)-P_{f(t)}\|=o((t-t_0)^2)$

אבל

$$\|f(t)-P_{f(t)}\|=\|r(t)-P_r(t)\|\le 2\|r(t)\|$$

$\blacksquare$


$f(s)$
$\frac{1}{\varkappa(s)}$
$\varkappa(s)$
$f(s)+\frac{1}{\varkappa(s)}\cdot N(s)$
מרכז המעגל

10/6/08

$O(n)$ העתקה אורתוגונלית $U\in$ אם $\langle x,y\rangle = \langle Ux, Uy\rangle$ לכל $x,y\in\mathbb{R}^n$

$U\in SO(n)$ אם $U\in O(n)$ וגם $\det U=1$.
זה נק' סיבוב

$\Leftarrow U(x\times y)=Ux\times Uy$

τ, κ.

אינווריאנטים κ ו- τ תחת העתקה צפידה.

מערכת אורתוגונלית $v_1 \dots v_n$ אם $\langle v_i,v_j\rangle=0$ לכל $i\neq j$, $v_i\neq 0$

מערכת אורתונורמלית $v_1\dots v_n$ אם $\langle v_i,v_j\rangle=\delta_{ij}$

<u>טענה:</u> העתקה $V:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ היא איזומטריה (כלומר $\|Vx-Vy\|=\|x-y\|$ לכל $x,y\in\mathbb{R}^n$) אמ"מ קיימים $a\in\mathbb{R}^n$ ו- $U\in O(n)$ כך ש $Vx=Ux+a$ לכל x.

<u>הוכחה:</u>

כיוון 1 $\Leftarrow$ ברור.

כיוון 2 $\Rightarrow$ ניקח $a=V0$ (0 של V) צ"ל: $Ux=Vx$ היא אורתוגונלית.

בעזרת הפולריזציה:

$$\|x-y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2-2\langle x,y\rangle$$

$$\Rightarrow \langle x,y\rangle=\frac{\|x\|^2+\|y\|^2-\|x-y\|^2}{2}$$

$$\langle Ux,Uy\rangle=\frac{1}{2}\left(\|\underset{Vx-V0}{\underbrace{Ux}}\|^2+\|\underset{Vy-V0}{\underbrace{Uy}}\|^2-\|\underset{Vx-Vy}{\underbrace{Ux-Uy}}\|^2\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\|x-0\|^2+\|y-0\|^2-\|x-y\|^2\right)=\langle x,y\rangle$$

<u>הגדרה:</u> V העתקה צפידה: $V=U+\underset{\text{וקטור ב-}\mathbb{R}^n}{a}$ כאשר $U\in SO(n)$

<u>משפט:</u> תהי $\underset{\text{מסילה בעלת פיתול}}{f:[a,b]\to\mathbb{R}^3}$, $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ העתקה צפידה,

$F=\underset{SO(3)}{U}+a$ נסמן $g(t)=Ff(t)$. אזי לכל $t\in[a,b]$

$\kappa_g(t)=\kappa_f(t)$ ו- $\tau_g(t)=\tau_f(t)$.

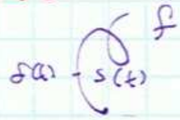
הוכחה

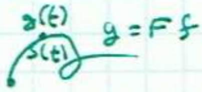
מגדירים $S_g(t)=\ell(g|_{[a,t]})$, $S_f(t)=\ell(f|_{[a,t]})$

צריך: $S_g(t)=S_f(t)$ לכל $t\in[a,b]$ כי:

$$\underbrace{\sup_{\substack{T \text{ חלוקה} \\ [a,t] \text{ של}}} \sum \|f(t_i)-f(t_{i-1})\|}_{S_f(T)} \quad , \quad \underbrace{\sup_{\substack{T \text{ חלוקה} \\ \text{של} \\ [a,t]}} \sum \| Ff(t_i)-Ff(t_{i-1})\|}_{S_g(t)}$$

$DF=U$ ← מט-יעקובין של F





לכן בה"כ אפשר לקחת פרמטריזציה לפי אורך.

$T_f(s)=f'(s)$

$$g'(s) = \underbrace{DF(f(s))}_{U}\cdot f'(s)$$

$$T_g(s)=U f'(s)=U\,T_f(s)$$

$$\|f''(s)\| = \kappa_f(s)$$

$$g''(s)=\frac{d}{ds}g'(s)=(Uf'(s))'=Uf''(s)$$

$$\kappa_g(s)=\|g''(s)\|=\|f''(s)\|$$

$$\Rightarrow \kappa_g(s)=\kappa_f(s)$$

$$N_g(s)=\frac{T'_g(s)}{\kappa_g(s)}= \qquad \text{וגם} \quad N_f(s)=\frac{T_f'(s)}{\kappa_f(s)}$$

$$=\frac{T'_g(s)}{\kappa_f(s)}=\frac{U\,T_f'(s)}{\kappa_f(s)}=U\cdot\frac{T'_f(s)}{\kappa_f(s)}=U\,N_f(s)$$

U הומוגנית

$$\Rightarrow N_g(s)=U\,N_f(s)$$

$$B_f(s)=T_f(s)\times N_f(s)$$

$$B_g(s)=T_g(s)\times N_g(s)=UT_f(s)\times UN_f(s)=U\,(T_f(s)\times N_f(s))=$$

U סיבוב לכן שומר על המכפלה

$$=U\,B_f(s)$$

$$\Rightarrow B_g(s)=U\cdot B_f(s)$$

$T_g=UT_f$
$N_g=UN_f$
$B_g=UB_f$

[illegible]

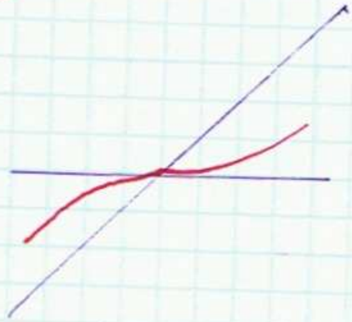
$\tau_f(s) = \langle N_f'(s), B_f(s) \rangle$

$\tau_g(s) = \langle N_g'(s), B_g(s) \rangle = \langle U N_f'(s), U B_f(s) \rangle =$

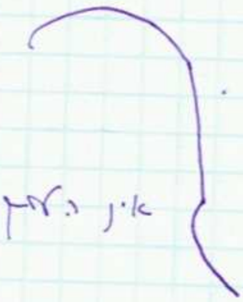
$\overset{(1)}{=} \langle N_f'(s), B_f(s) \rangle = \tau_f(s)$

(1) כי U אורתוגונלית
ולכן שומרת מ"פ.

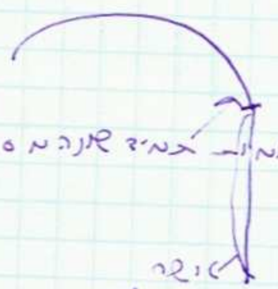
$\Rightarrow \quad \underline{\tau_g(s) = \tau_f(s)}$



$g_\alpha(t) = \begin{cases} (t, (\cos\alpha) t^3, (\sin\alpha) t^3) & t \le 0 \\ (t, t^3, 0) & t \ge 0 \end{cases}$ עבור $0 \le \alpha \le 2\pi$



אין הצגה רציפה



עקמומיות תמיד שונה מ0

ישר
תמיד 0

אז יש הצגה
רציפה.

10/6/08

משפט 1 (היחידות)

הנ"ל: $f,g:[0,l]\to R^3$ שתי מסילות בעלות פיתול.

עם שלכל $s\in[0,l]$ $\kappa_f(s)=\kappa_g(s)$ ו- $\tau_f(s)=\tau_g(s)$,

אזי קיימת העתקה צפידה $F:R^3\to R^3$ כך ש- $\underset{\circledast}{g(s)=Ff(s)}$ לכל s.

הוכחה

ניקח $U\in SO(3)$ כך ש-
$$\begin{cases} UT_f(0)=T_g(0) \\ UN_f(0)=N_g(0) \\ UB_f(0)=B_g(0) \end{cases}$$

$$a=g(0)-f(0)$$

נגדיר $Fx=Ux+a$ **טענה**: F מקיים את $\circledast$. הוכחה:

$x(s)=T_g(s)-UT_f(s)$, $y(s)=N_g(s)-UN_f(s)$, $z(s)=B_g(s)-UB_f(s)$.

מטרה: להראות ש- $w(s)=0$ (כאשר $w(s)=\|x(s)\|^2+\|y(s)\|^2+\|z(s)\|^2$).

מ- Frenet
$$\begin{pmatrix} T_g' \\ N_g' \\ B_g' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \kappa_g & 0 \\ -\kappa_g & 0 & \tau_g \\ 0 & -\tau_g & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_g \\ N_g \\ B_g \end{pmatrix}$$

שימו לב ש- $\kappa=\kappa_g=\kappa_f$ וגם $\tau=\tau_f=\tau_g$

לפי הנחת המשפט

וגם
$$\begin{pmatrix} (UT_f)' \\ (UN_f)' \\ (UB_f)' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \kappa_f & 0 \\ -\kappa_f & 0 & \tau_f \\ 0 & -\tau_f & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} UT_f \\ UN_f \\ UB_f \end{pmatrix}$$

$$(UT_f)'=UT_f'=U\kappa_f\cdot N_f=\kappa_f\,UN_f$$

$$\begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \\ z'(s) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} T_g'(s)-(UT_f)'(s) \\ N_g'(s)-(UN_f)'(s) \\ B_g'(s)-(UB_f)'(s) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{pmatrix}$$

$$w'(s)=2(\langle x'(s),x(s)\rangle+\langle \overbrace{y'(s)}^{-\kappa x(s)+\tau z(s)},y(s)\rangle+\langle z'(s),z(s)\rangle)=$$
$$=2(\kappa(s)\langle y(s),x(s)\rangle-\kappa(s)\langle x(s),y(s)\rangle+\tau(s)\langle z(s),y(s)\rangle-\tau(s)\langle y(s),z(s)\rangle)$$
$$=0$$

$$\Rightarrow \quad w(s)=0$$
(כי $w(0)=0$ ו- $w'(s)=0$.)

$\Leftarrow$ $T_g(s)=UT_f(s)$ וכו ....

נתבונן ב- $g(s)-u\cdot f(s)$.

כדי להראות שזה שווה לקבוע כלשהו a. גוזרים:

$$(g(s)-uf(s))' = g'(s)-uf'(s) = \tau g(s)-u\tau f(s)=x(s)=0$$

$\Leftarrow$ $g(s)-u\cdot f(s)$ קבוע ב R^3 (ברור שהקבוע הוא $g(0)-uf(0)$)

$\varphi:[a,b]\to R$ מסילה גזירה, קיים $b\in R^n$

$\dot\varphi(t)=0$ לכל t $\Leftarrow$ $\varphi(t)=b$ $\quad(\dot\varphi=(\dot\varphi_1,\dot\varphi_2,\dots,\dot\varphi_n))$

<u>משפט 2</u> (קיום)

תהיינה $\kappa:[0,l]\to(0,\infty)$; $\tau:[0,l]\to R$ שתי פונקציות רציפות.

בלי אפס!

אזי קיימת מסילה: $f:[0,l]\to R^3$ כך ש $\kappa_f(s)=\kappa(s)$; $\tau_f(s)=\tau(s)$

לכל s.

<u>רקע</u> (מד"ר): תהיינה $a_{ij}:[\alpha,\beta]\to R$ פונקציות רציפות, $1\le i,j\le k$

ויהי $b=(b_1,\dots,b_k)\in R^k$, אזי קיימות פונקציות גזירות $f_i:[\alpha,\beta]\to R$

$i=1\dots k$ כך ש

$$f_1' = a_{11}f_1+a_{12}f_2+\dots+a_{1k}f_k$$
$$\vdots$$
$$f_k' = a_{k1}f_1+a_{k2}f_2+\dots+a_{kk}f_k$$

לכל $t\in[\alpha,\beta]$ (f_i', f_i פונק' של t)

כלומר $f'(t)=Af(t)$

$f(t)=(f_1(t),\dots,f_k(t))$ והפתרון הוא <u>יחיד</u> (כלומר <u>A הפיכה</u>)

וגם $f_i(\alpha)=b_i$ צ"ל $f(\alpha)=b$.

<u>במקרה של $k=1$</u> $\quad f'(t)=a(t)\cdot f(t)\quad f(\alpha)=b$

$$\alpha\le t\le\beta$$

$$(\ln f(t))' = \frac{f'(t)}{f(t)} = a(t)$$

$$\ln f(t) = \int_\alpha^t a(u)\,du + C$$

$$f(t)= b\cdot \exp\left(\int_\alpha^\beta a(u)\,du\right)$$

$$\begin{pmatrix} T_g' \\ N_g' \\ B_g' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_g & 0 \\ -\kappa_g & 0 & \tau_g \\ 0 & -\tau_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_g \\ N_g \\ B_g \end{pmatrix}$$

Frenet-מ

$$\begin{matrix} T_1 & T_2 & T_3 \\ N_1 & N_2 & N_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{matrix}$$

$k=9$

$$\begin{pmatrix} T_1' \\ T_2' \\ T_3' \\ N_1' \\ N_2' \\ N_3' \\ B_1' \\ B_2' \\ B_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+0+\overset{a_{14}}{\kappa N_1}+\dots \\ +\kappa N_2+ \\ +\kappa N_3 \\ -\kappa T_1+ \quad +\tau B_1 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad a_{47} = \begin{pmatrix} \kappa N_1 \\ \kappa N_2 \\ \kappa N_3 \\ -\kappa T_1+\tau B_1 \\ -\kappa T_2+\tau B_2 \\ -\kappa T_3+\tau B_3 \\ -\tau N_1 \\ -\tau N_2 \\ -\tau N_3 \end{pmatrix}$$

$T_1\ T_2\ T_3\ N_1\ N_2\ N_3\ B_1\ B_2\ B_3$

+<u>תנאי התחלה</u> $B(0)=(0\ 0\ 1),\ N(0)=(0\ 1\ 0),\ T(0)=(1,0,0)$

יש פתרון לכל $s\in[0,1]$ $T(s),N(s),B(s)$

צ"ל שזו מערכת אורתונורמלית ימנית. נ"א

$$\varphi(s) = \begin{pmatrix} T_1(s) & T_2(s) & T_3(s) \\ N_1(s) & N_2(s) & N_3(s) \\ B_1(s) & B_2(s) & B_3(s) \end{pmatrix} \in O(3) \qquad \varphi(0)=I$$

נסמן

$\det\varphi(s)=1$ +

נזכיר כי $\varphi'(s)=k(s)\cdot\varphi(s)$

$$k(s)=\begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix}$$

צ"ל: $\Psi(s)=\varphi(s)\cdot\varphi(s)^*=I$ $\quad (A^*=\bar{A}^t)$

$$\Psi'(s)=\varphi'(s)\cdot\varphi(s)^*+\varphi(s)\cdot\varphi'(s)^*=k(s)\varphi(s)\cdot\varphi(s)^*+$$
$$+\varphi(s)\cdot\varphi(s)^*k(s)^*$$

$$\Psi'(s)=k(s)\cdot\Psi(s)+\Psi(s)k(s)^*$$

לפי המשפט (מעבר) יש לזה פתרון יחיד.

$(\ \Psi(s)=I \qquad 0\equiv k(s)+k(s)^*\ )$

רואים כי $\Psi(s)=I$ הוא פתרון, לכן מתקיים $\Psi(s)\equiv I$.

גם ברור ש $\det\varphi(s)=1$ כי זוהי פונק' רציפה ו[illegible]

ש $\det\varphi(0)=1$.

הסיכום: לכל s קיימת מערכת אורתונורמלית ימנית $T(s),N(s),B(s)$

כך שמשוואות Frenet מתקיימות לכל s.

בקיצור:

$$f(s) = \left(\int_0^s T_1(t)\,dt,\ \int_0^s T_2(t)\,dt,\ \int_0^s T_3(t)\,dt \right)$$

מתקיים

$$f'(s) = T(s)$$

$$f''(s) = T'(s) \underset{\text{לפי frenet}}{=} \kappa N(s)$$

$$\kappa_f(s) = \|f''(s)\| = \kappa(s)$$

$$N_f(s) = \frac{f''(s)}{\kappa_f(s)} = \frac{\kappa N(s)}{\kappa} = N(s)$$

$$B_f(s) = T_f(s) \times N_f(s) = T(s) \times N(s) = B(s)$$

$$\tau_f(s) = \langle N_f'(s), B_f(s) \rangle = \langle N'(s), B(s) \rangle \underset{\text{frenet}}{=} \tau(s)$$

דוגמה 3: אם $\tau(s) \equiv 0$ אזי $f(s) = (\quad , \quad)$

(כמו מישורית נמצאת ב-R^2)

$f'(s) = (\cos\alpha(s), \sin\alpha(s))$ כי הנורמה שלו 1.

$$f''(s) = \alpha'(s) \cdot (-\sin\alpha(s), \cos\alpha(s))$$

אז $\|f''(s)\| = \kappa(s)$

$$\Rightarrow \kappa(s) = |\alpha'(s)|$$

אם ניקח $\alpha(s) = \int_0^s \kappa(t)\,dt$

$\Leftarrow$

$$f'(s) = \left(\cos\int_0^s \kappa(t)\,dt,\ \sin\int_0^s \kappa(t)\,dt \right)$$

$$f(s) = \left(\int_0^s \cos\left(\int_0^u \kappa(t)\,dt\right) du,\ \int_0^s \sin\left(\int_0^u \kappa(t)\,dt\right) du \right)$$

17/6/08

- Millman & Parker \ Differential Geometry
- Ruth Lawrence

משטחים ב- R^3

. $p=(u,v,w)\in R^3$, $q=(x,y)\in R^2$

<u>הגדרות:</u>

תת קבוצה $M\subseteq R^3$ נקראת משטח, אם לכל $p\in M$ קיימת קבוצה פתוחה $U\subseteq R^2$ וקבוצה פתוחה $p\in V\subseteq R^3$ ו- $\underbrace{f:U\to M\cap V}_{\text{patch פִּסָּה}}$

שהיא הומיאומורפיזם (צ"ל חח"ע, על, רציפה, ו- f^{-1} גם רציפה).

(f גם נקראת פרמטריזציה של $M\cap V$; $M\cap V$ נקראת גם סביבה של p ב- M)

נניח ש- f דיפרנציאבילית ב- q

בהינתן f,U,V,M, $q\in U$ נקראת נקודה רגולרית של f, אם $\deg Df(q)=2$

(זה שקול $\Leftrightarrow$ לעמודות של
$$J_f(q)=\begin{array}{c} \left(\begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{matrix}\right)(q) \\ \begin{matrix} \underbrace{\qquad}_{\text{סימון לעמודה } \frac{\partial f}{\partial x}} & \underbrace{\qquad}_{\frac{\partial f}{\partial y}} \end{matrix} \end{array}$$
הן בת"ל, שקול $\Leftrightarrow$

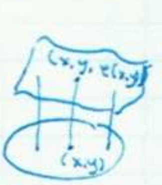
שקול $\Leftrightarrow$ $\frac{df}{\partial x}(q)\times\frac{df}{\partial y}(q)\neq 0$. (לא רגולרית = סינגולרית)

נאמר שפיסה f הינה רגולרית אם f גזירה ברציפות וכל נקודה של U היא רגולרית.

המשטח M נקרא משטח רגולרי אם לכל $p\in M$ יש <u>פרמטריזציה רגולרית</u> של סביבה של p. (כשנאמר "משטח" הכוונה למשטח רגולרי. צריך להסתכל על Df רק עבור נקודות שמעניינות אותנו)

I תהי $U\subseteq R^2$ פתוחה. תהי $\varphi:U\to R$ פונקציה רציפה / <u>גזירה ברציפות</u>. אזי $f:U\to R^3$ המוגדרת ע"י $f(x,y)=(x,y,\varphi(x,y))$ היא פיסה / <u>פיסה רגולרית</u>

$V=U\times R$, $M=f(U)$, $M=M\cap V$, $f:U\to M$ הומיאומורפיזם



$f^{-1}=\pi$ ההטלה על המישור u-v

פיסת Monge זו f כנ"ל (מעלה קודם) $.\ 2$ דרגה $\rightarrow J_f=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y}\end{pmatrix}$

או $g(x,y)=(x,\varphi(x,y),y)$ או

$h(x,y)=(\varphi(x,y),x,y)$

II) תהי $V\subseteq\mathbb{R}^3$ פתוחה ונניח $F:V\to\mathbb{R}$ גזירה ברציפות.

נגדיר $M=\{p\in V:\ \nabla F(p)\neq 0\ ,\ F(p)=c\}$ (מעניין רק, אם $c\in F(V)$)

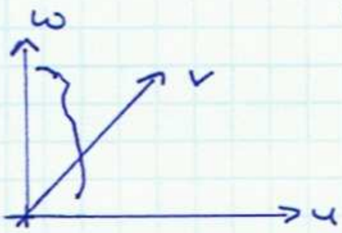
למשל הספירה $S_2=\{(u,v,w):u^2+v^2+w^2=1\}$.

בסמסטר קודם היה M הוא משטח רגולרי. (אפילו: לכל $p\in M$ יש פיסת Monge $f:U\to M$ כך ש- $p\in f(U)$).

<u>משפט</u>: לכל משטח רגולרי M, לכל $p\in M$ יש פיסת Monge $f:U\to M$ כך ש- $p\in f(U)$.

<u>הוכחה</u> (מחר).

משטח סיבוב:



$\gamma(t)=(\varphi(t),0,\psi(t))$

מסילה חלקה $a<t<b$

$\varphi(t)>0$

$M=\{(\varphi(t)\cdot\cos\alpha,\ \varphi(t)\cdot\sin\alpha,\ \psi(t))\}$
$a<t<b \quad \alpha\in\mathbb{R}$

$f(t,\alpha)=(\varphi(t)\cdot\cos\alpha,\ \varphi(t)\cdot\sin\alpha,\ \psi(t))$

$J_f=\begin{pmatrix}\varphi'(t)\cos\alpha & -\varphi(t)\sin\alpha\\ \varphi'(t)\sin\alpha & \varphi(t)\cos\alpha\\ \psi'(t) & 0\end{pmatrix}$

18/6/08

פיסות Monge

$\mathbb{R}^2 \supseteq U$, $\varphi: U \to \mathbb{R}$ פונק' רציפה

$$f(x,y) = (x, y, \varphi(x,y))$$
$$g(x,y) = (x, \varphi(x,y), y)$$
$$h(x,y) = (\varphi(x,y), x, y)$$

<u>טענה</u>: יהי $M \subseteq \mathbb{R}^3$ משטח רגולרי אזי לכל $p \in M$ קיימת פיסת M
$f: U \to M$ "המכסה אותו" זאת כך ש $p \in f(W)$.

<u>הוכחה</u>:

תהי $g: V \to M$ פיסה רגולרית כך ש $g(q) = p \in g(V)$.

יודעים כי

$\deg Dg(q) = 2$ לכן אחד המינורים

$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(q)$, $\frac{\partial(u,w)}{\partial(x,y)}(q)$ או $\frac{\partial(v,w)}{\partial(x,y)}(q)$ אינו סינגולרי. בה"כ נניח

ש $0 \neq \det \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(q)$.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(q), \frac{\partial u}{\partial y}(q) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(q), \frac{\partial v}{\partial y}(q) \end{pmatrix}$$

זה אומר ש $D_F(q) \in GL(2)$ כאשר $F: V \to \mathbb{R}^2$

מוגדר ע"י $F(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ (או $F = \pi \circ g$ כאשר
$(\pi(u,v,w) = (u,v)$
$\pi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

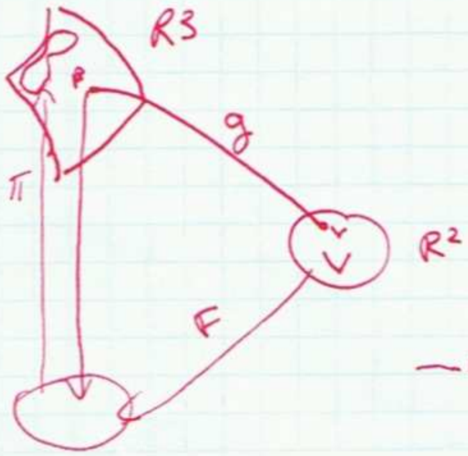
לפי משפט הפונק' ההפוכה:

קיימים $W_1 \subseteq F(V)$, $W \subseteq V$

כך ש F הוא <u>דיפאומורפיזם</u> מ W

על W_1, ניקח עבור $(x,y) \in W_1$

$$\varphi(x,y) = g \circ F^{-1}(x,y)$$



F דיפאומורפיזם = F הומאומורפיזם כך ש F ו- F^{-1} דיפרנציאביליות רציפות.

פיסת M: $(x,y,\varphi(x,y))$ עבור $(x,y) \in W_1$.

<u>מושג</u>: תהיינה $f: U \to M$, $g: V \to M$ שתי פיסות רגולריות

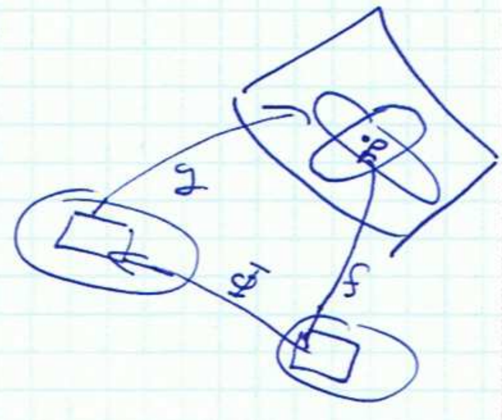
אומרים ש f שקולה ל g אם קיים דיפאומורפיזם

$\Phi: V \to U$ כך ש $f = g \circ \Phi$. <u>הערה</u>: (אז $g(V) = f(U)$).

ברור שזה יחס שקילות (הסימון $g=f\circ\Phi^{-1}$)

<u>טענה 2</u>: תהיינה f,g שתי פרמטריזציות המכסות את $p\in M$.
כך ש- $p\in f(U)\cap g(V)$ ($f:U\to M$, $g:V\to M$). אזי קיימות
$U_1\subseteq U$ ו- $V_1\subseteq V$ קבוצות פתוחות כך ש- $p\in f(U_1)\cap g(V_1)$ וגם
$f|_{U_1}\sim g|_{V_1}$. (בשקילות מתכוונים לדיפאומורפיזם).

<u>הוכחה:</u>



יודעים ש- $p\in f(U)=M\cap U_0$
$p\in g(V)=M\cap V_0$
כאשר U_0,V_0 פתוחים ב- $\mathbb{R}^3$.
ניקח $p\in W=V_0\cap U_0$.
ניקח $U_1=f^{-1}(W\cap M)$ ו-
$V_1=g^{-1}(W\cap M)$

צ"ל $f|_{U_1}\sim g|_{V_1}$. אז $\Phi=g^{-1}\circ f$
ראינו שמקומית $g^{-1}=F^{-1}\circ\pi$ צ"ל

$\Phi=F^{-1}\pi f$. אז הראינו שלכל $s\in U_1$ קיימת סביבה U_2
כך שזה נכון ($g^{-1}=F^{-1}\pi$). (זה מספיק להראות ש- Φ דיפ')

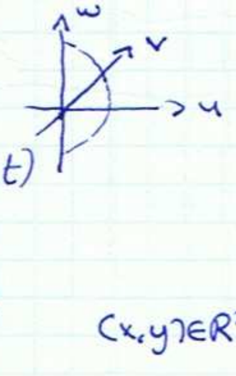
$$\varphi=\Sigma\circ g\circ F^{-1}$$
$$\Sigma(u,v,w)=w$$

<u>ספירה</u>: $S_2=\{(u,v,w):u^2+w^2+v^2=1\}$ $\quad F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$

$$M=\{p:F(p)=1\wedge\nabla F(p)\neq 0\}$$
$$F(u,v,w)=u^2+w^2+v^2$$

פרמ' M: $\{(x,y):x^2+y^2<1\}$ $\varphi(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

$S_2\setminus\{$שני קוטבים$\}$



$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$
$(\cos\alpha\sin t,\sin\alpha\cos t,\sin t)$
קווי הספירה

<u>תרגיל</u>: פרמ' M ל- $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ $\varphi(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ רגולרי עבור
$q\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

אם מציבים $F(u,v,w)=w^2-v^2-u^2$, $M=\{p : F(p)=0,\ \nabla F(p)\neq 0\}$ רגולרי.

$= \text{חרוט} \setminus \{(0,0,0)\}$

טורוס

$$f(t)=(2+\cos t,\ 0,\ \sin t)$$

$$M=\{((2+\cos t)\cos\alpha,\ (2+\cos t)\sin\alpha,\ \sin t)\}$$

__מושגים:__ M משטח רגולרי. $f:U\to M$, $p\in M$

פיסה רגולרית $p=f(q)$ נקרא נורמלי ל f ב q:

$$n_f(q)=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(q)\times\frac{\partial f}{\partial y}(q)}{\left\|\frac{\partial f}{\partial x}(q)\times\frac{\partial f}{\partial y}(q)\right\|}$$

המישור המשיק $=\{v\in\mathbb{R}^3 : \langle v, n_f(q)\rangle=0\}$

$$= n_f(q)^{\perp} = T_f(p)$$

__טענה 1:__ $T_f(p)=Df(q)(\mathbb{R}^2)=\operatorname{span}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(q),\frac{\partial f}{\partial y}(q)\right\}$ כי $Df(q)(1,0)=\frac{\partial f}{\partial x}(q)$

$Df(q)(0,1)=\frac{\partial f}{\partial y}(q)$

__טענה 2:__ אם g היא פיסה רגולרית אחרת המכסה את p אז:

$T_g(p)=T_f(p)$, $g:V\to M$ $\quad g(s)=p$

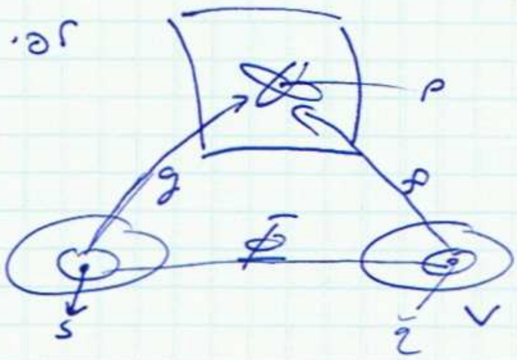
__הוכחה:__

לפי טענה, קיימות סביבות $q\in U_1$, $s\in V_1$

$\exists!\ \Phi: V_1\to U_1$ דיפאומורפיזם

כך ש $g=f\circ\Phi$.

$$Dg(s)=Df(\underbrace{\Phi(s)}_{q})\circ D\Phi(s)$$



__צ"ל:__ $Df(q)\mathbb{R}^2=Dg(s)\mathbb{R}^2$. ברור.

לכן מותר להגדיר $T_M(p)=T_f(p)$ עבור f פיסה רגולרית כלשהי, המכסה את p.

$$\mathbb{R}\cdot n_f(q)=T_M(p)^{\perp}$$

לכן $n_M(p)$ "מוגדר" עד כדי סימן.

נסמן $\tilde{T}_M(p)=p+T_M(p)$.

טענה: אם $p_n \in M$, $p_n \to p$ אזי $d(p_n, \tilde{T}_M(p)) = o(\|p-p_n\|)$

$\tilde{T}_M(p)$ הוא המישור (האפיני) היחיד בעל תכונה זו !

הוכחה: תהי $f: U \to M$ המכסה את p ‏$f(q)=p$. וה"כ $p_n = f(q_n)$

$$f(q_n) = \underbrace{\underset{\overset{\shortparallel}{p}}{f(q)} + D_f(q)(q_n-q)}_{\in T_M(p)} + r_n$$. עם

$$\|r_n\| = o(\|q-q_n\|) = o(\|p-p_n\|)$$