13/5/08

אינפי מתקדם 2

משפט חילוף משתנה

במימד 1: פונקציה $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ גזירה ברציפות

לכל פונקציה רציפה $f: g([a,b])\to\mathbb{R}$ (a<b) מתקיים

$$L=\int_a^b f(g(t))\cdot g'(t)\,dt=\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx=R \qquad (*)$$

"הוכחה" (לא פורמלית - רק אינטואיציה)

ניקח חלוקה $T: a=t_0<t_1<\dots<t_N=b$ מספיק עדינה

ואז נקבל $L\approx\sum_{i=1}^{N} f(g(t_i))g'(t_i)\cdot(t_i-t_{i-1})$

ניקח חלוקה:

$X: g(a)=x_0<x_1<\dots<x_N=g(t_N)=g(b)$ ואז שוב ע"י סכום רימן

(נניח g מונוטונית בשביל לנמק כאן) (טיין אפילו הה"נ כתבנו עולה)

$x_i=g(t_i)$

$$R\approx\sum_{i=1}^{N} f(g(t_i))\cdot(g(t_i)-g(t_{i-1}))$$

"הגדרת" הנגזרת

$$\underbrace{g(t_i)-g(t_{i-1})}_{\text{אורך הקטע } g([t_i,t_{i-1}])}\approx \underbrace{g'(t_i)}_{\text{מקדם ההתפשטות}}\cdot(t_i-t_{i-1})$$

ולכן $R\approx L$.

ב-n מימדים:

המשפט: תהי $U\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה בעלת נפח.

$g:\overset{\text{סגור}}{\overline{U}}\to\mathbb{R}^n$

פונקציה דיפרנציאבילית ברציפות. (על השפה רק שתהיה רציפה)

g חח"ע ! $Dg(x)\in GL(n)$ לכל $x\in U$ (כלומר $\det J_g(x)\neq 0$ לכל $x\in U$)

אז: לכל פונקציה רציפה $f: g(\overline{U})\to\mathbb{R}$ מתקיים:

$$L=\int_U f(g(t))\cdot|\operatorname{Det} J_g(t)|\,dt=\int_{g(U)} f(x)\,dx=R \qquad (*_n)$$

ב $(*_1)$ יש רק שתי אפשרויות: $0<g'(t)$ לכל $t\in(a,b)$. g עולה

אז: $g((a,b))=(g(a),g(b))$ ואז $(*_n)$! $(*)$ מתקבלת. משלב... $|g'(t)|=g'(t)$

אם $g'(t)<0$ לכל $t\in(a,b)$ $(a<b)$, g יורדת.

אז $g((a,b))=(g(b),g(a))$ וגם $\int_{g(a)}^{g(b)} = -\int_{g(b)}^{g(a)}$

וגם כאן $(*_n)$ ל$n=1$; ⊛ משתלבים היטב.

"<u>הוכחה</u>":

בה"כ $\bar{U}$ תיבה. T חלוקה סדירה של $\bar{U}$.

$$T=\{A_1,A_2,\dots,A_N\}$$

תיבות הנפגשות רק בשפה

בוחרים $t_i\in A_i$

$$L\approx\sum_{i=1}^{N}\left(f(g(t_i))\cdot|\det J_g(t_i)|\right)\cdot V(A_i)$$

$$R=\sum_{i=1}^{N}\int_{g(A_i)} f(x)\,dx$$

ש $g(A_i)$ מקיים $f(x)\approx f(g(t_i))$

לכן: $\int_{g(A_i)} f(x)\,dx\approx f(g(t_i))\cdot v(g(A_i))$

$$\Rightarrow R\approx\sum_{i=1}^{N} f(g(t_i))\cdot v(g(A_i))$$

ב- A_i $g(x)\approx g(t_i)+Dg(t_i)(x-t_i)$ (לפי הגדרה של דיפרנציאביל)

ולכן

$$\underbrace{g(A_i)}_{\text{קבוצה}}\approx\underbrace{g(t_i)}_{\text{נקודה}}+\underbrace{Dg(t_i)}_{\text{העתקה}}\cdot(\underbrace{A_i-t_i}_{\text{תיבה שהוזזה}})$$

$$v(g(A_i))\approx|\det J_g(t_i)|\cdot v(A_i)$$

14/5/08

אינטגרציה פרקים XII-2,3,4

ההוכחה נמצאת בספר אך קשה.

(⁂) $U \subseteq R^n$ פתוחה ובעלת נפח (= הפונקציה המציינת אינטגרבילית וקבוצת השפה בעלת מידה 0. הפונקציה קבועה על קבוצה חסומה).

העתקה $g: \bar{U} \to R^n$ דיפרנציאבילית ברציפות ב- $\bar{U}$.

נאמר ש⁂ מקיימת את

$$(*_n) \quad \int_U f(g(t)) \cdot |\det J_g(t)|\, dt = \int_{g(U)} f(x)\, dx$$

ולכל פונקציה רציפה f המוגדרת על התמונה ($f: g(U) \to R$)

<u>2 הערות:</u>

1) אם g פרמוטציה

($(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightsquigarrow (x_2, x_1, x_3, \dots)$)

אזי g מקיימת את $(*_n)$ (על כל U).

2) אם g_1 מקיימת את $(*_n)$ על U, ו g_2 מקיימת את $(*_n)$ על $g_1(U)$

אזי $g = g_2 \circ g_1$ מקיימת את $(*_n)$ על U כי:

$$\int_{g(U)} f(x)\,dx = \int_{g_2(g_1(U))} f(x)\,dx \underset{\substack{\text{הנחה}\\(2)}}{=} \int_{g_2(U)} \underbrace{f(g_2(t)) \cdot |\det J_{g_2}(t)|}_{F(t)}\, dt = \int_{g_1(U)} F(t)$$

$$\underset{\text{הנחה (1)}}{=} \int_U f(g_2(g_1(s))) \cdot |\det J_{g_2}(g_1(s))| \cdot |\det J_{g_1}(s)|\, ds =$$

$$\overset{?}{=} \int_U f(g(s)) \cdot |\det J_g(s)|\, ds$$

זה מה שצ"ל

באמת $Dg(s) = Dg_2 \circ g_1(s) = Dg_2(g_1(s)) \circ Dg_1(s)$

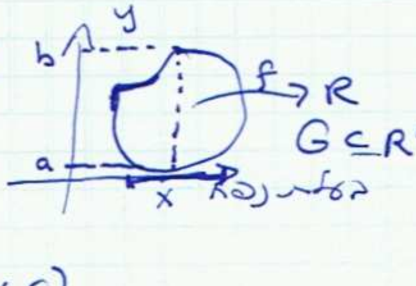
לפי כלל השרשרת.

במטריצות $J_g(s) = J_{g_2}(g_1(s)) \cdot J_{g_1}(s)$

ולכן $\det(J_g(s)) = \det J_{g_2}(g_1(s)) \cdot \det(J_{g_1}(s))$

Fubini

$f: G \to R$ אינטגרבילית, עבור $S \in R$



נסמן

$$G_s = \{ x \in R^{n-1} \mid (x, s) \in G \}$$

$$f_s: G_s \to R \qquad f_s(x) = f(x, s)$$

$G_s=\phi$ עבור $s<a$ ו-$s>b$

$$\int_G f(y)dy = \int_a^b\left(\int_{G_s} f_s(x)dx\right)ds$$

<u>מושג</u>

העתקה $g:U\to\mathbb{R}^n$ נקראת "טובה" אם יש i,j כך ש $g_i(x)=x_j$, $g(x)=(g_1(x),\dots,g_n(x))$.

כאשר $g(x_1,\dots,x_{n-1},x_n)=(g_1(x),\dots,g_{n-1}(x),x_n)$, $i=j=n$

<u>הוכחות:</u>

1) אינדוקציה (עבור $n=1$ $(*)=(*_n)$ משיעור קודם, [illegible]
($*_n$ נכונה עבור [illegible])

מניחים עבור $n-1$.

א) כל העתקה טובה חח"ע עם $Dg(x)$ הפיך ב-$GL(n)$ לכל x מקיימת את $(*_n)$

ב) כל העתקה כנ"ל אפשר להציג כ- $g=\psi\circ\varphi$ כאשר
φ ; ψ טובות (לוקלית) וגם חח"ע ולא סינגולריות.

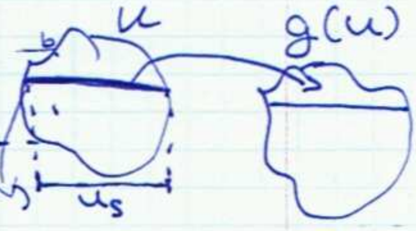
ג) הדבקה.

<u>משפט א'</u>

$g:U\to\mathbb{R}^n$ דיפרנציאבילית ברציפות, חח"ע ו $Dg(x)\in GL(n)$ לכל $x\in U$

g טובה ($g_n(x)=x_n$ נשמר ב: (זה לא משנה)), אזי g מקיימת את $(*_n)$ על U.

$$R=\int_{g(U)} f(y)dy = \int_a^b\Big(\int_{\underbrace{(g(U))_s}_{g^s(U_s)}} f_s(x)dx\Big)ds$$ לפי Fubini



כאשר אפשר להגדיר $g^s: U_s\to (g(U))_s$

$$g(x,s)=(g^s(x),s)$$

$$g(x)=(g_1(x),\dots,g_{n-1}(x),x_n)$$

$$g^s(x)=(g_1(x,s),\dots,g_{n-1}(x,s))$$

$$L=\int_U f(g(u))\cdot|\det J_g(u)|\,du \underset{\text{Fubini}}{=} \int_a^b\left(\int_{U_s} f_s(g^s(t))\cdot|\det J_{g^s}(t)|\,dt\right)ds$$

$u=(t,s)$

כי

$$J_g(t,s)=\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial g_{n-1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_{n-1}}{\partial x_n} \\ 0 & \cdots\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det J_g(t,s)=\det J_{g^s}(t)$$

$$J_{g^s}(t)=\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_{n-1}}{\partial x_1} & & \frac{\partial g_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \end{pmatrix}$$

כעת לכן

$$\int_{g^s(U_s)} f_s(x)\,dx = $$

$$= \int_{U_s} f_s(g^s(t))\cdot|\det J_{g^s}(t)|\,dt$$

מהנחת האינדוקציה ($n \Leftarrow n-1$) כי $U_s \subseteq R^{n-1}$.

וכן אם נפעיל את $\int_a^b ds$ על שני האגפים נקבל גם

שוויון.

<u>משפט ב</u>, <u>$n\geq 2$ ל</u>

g דיפרנציאבילית ברציפות ב-$U\subseteq R^n$ פתוחה, $Dg(x)\in GL(n)$

לכל $x\in U$, חח"ע.

אזי לכל $x\in U$ קיימת סביבה $x\in V\subset U$ ושתי העתקות (גזירות

ברציפות, חח"ע, רגולריות (הפיכות)): $\varphi: V\to R^n$ וגם

$\psi: \varphi(V)\to R^n$ בהתאם

<u>מסקנה:</u> g כנ"ל, אזי לכל $x\in U$ קיימת V כך ש $g|_V$ מקיימת

את $(*_n)$ ב V.

<u>הוכחה:</u> $x_0\in U$, יהי j כך ש: $\frac{\partial g_j}{\partial x_n}(x_0)\neq 0$. (כי אמרנו רגולרית)

ונגדיר את

$$\varphi(x)=(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},g_j(x))$$

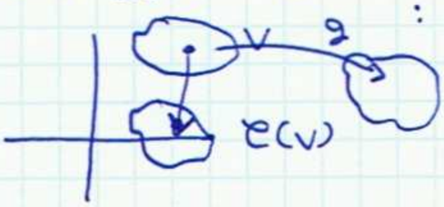
$$J_\varphi(x)=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ \frac{\partial g_j}{\partial x_1} & \cdots\ 1 & \frac{\partial g_j}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

ברור שקיימת סביבה W של x_0 שבה $J_\varphi \in GL(n)$, $\det J_\varphi(x) \neq 0$

עבור $x \in W$.

לפי משפט הפונקציה ההפוכה, קיימת סביבה V של x_0 כך ש

$\varphi: V \to \varphi(V)$ (1 חח"ע ו-φ^{-1} דיפרנציאבילית ברציפות.



$g = \psi \circ \varphi$

חייבים לקחת $\psi = g \circ \varphi^{-1}$

ניקח $\psi = g\varphi^{-1}$. $\psi_j(x) = x_n$

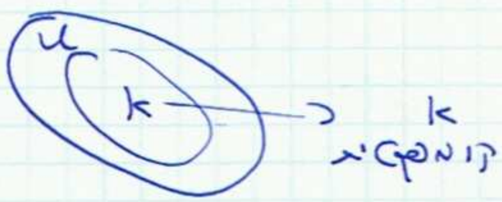
נראה: ψ עובדת. (שור על $\varphi(V)$ (.

ניקח $y \in \varphi(V)$ $\varphi(x) = (y_1 \dots y_n) = (x_1, x_2, \dots x_{n-1}, g_j(x))$.

$\psi(y) = g(x) = (g_1(x) \dots g_j(x) \dots g_n(x))$.

$K \subseteq U$ U פתוחה

K קומפקטית.



<u>עובדה:</u> קיימת פונקציה רציפה $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ כך ש $f(x)=1$ עבור $x \in K$, $f(x)=0$ עבור $x \notin U$.

הסבר $f(x) = \min(\varepsilon^{-1} d(x, U^c), 1)$

$\varepsilon = \min\{d(x, U^c) \mid x \in K\} > 0$