15/7/08

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \Gamma_{11}^1 \frac{\partial f}{\partial x} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial f}{\partial y} + Ln$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \Gamma_{21}^1 \frac{\partial f}{\partial x} + \Gamma_{21}^2 \frac{\partial f}{\partial y} + Mn$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \Gamma_{22}^1 \frac{\partial f}{\partial x} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial f}{\partial y} + Nn$$

__המשפט המדהים של Gauss:__

עקמומיות G היא מושג פנימי, ליתר דיוק אם $f:U\to M$ פרמטריזציה רגולרית
שביטויים בה ידועים E G F כפונקציות אז

$$K = \frac{1}{F}\left(\frac{\partial \Gamma_{21}^1}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial y} + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 \right)$$

$F \neq 0$ לא

(אם $F=0$ יש פיתוח עם E ו-G!
מקרים F)

__הוכחה__

__משימה:__ אנו נמצא $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ כך שמקדמים סקלריים כ"א דיפרנציאבילי $\frac{\partial f}{\partial x}$ וגם $\frac{\partial f}{\partial y}$ ומתקיים

$$\frac{\partial n}{\partial x} = a_{11} \frac{\partial f}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\alpha$$

$$\frac{\partial n}{\partial y} = a_{21} \frac{\partial f}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$-L = E \cdot a_{11} + F a_{12}$$

$$-M = F a_{11} + G a_{12}$$

$$-M = E a_{21} + F a_{22}$$

$$-N = F a_{21} + G a_{22}$$

מכאן $\rightarrow$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{EF-F^2} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -G & F \\ F & -E \end{pmatrix} \quad \mu\ f$$

שהרי:

$$-\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

__משימה:__ כי נכתוב את $X = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) \in \mathbb{R}^3$ בבסיס $\leftarrow \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, n \right\}$

זה בסיס של $\mathbb{R}^3$
בכל נקודה

$$X = \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial L}{\partial y} n + \Gamma_{11}^1 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \Gamma_{11} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + L \frac{\partial n}{\partial y}$$

$$Y=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)=\alpha_2$$

$$X=\alpha_1\frac{\partial f}{\partial x}+\beta_1\frac{\partial f}{\partial y}+\gamma_1 n$$
$$Y=\alpha_2\frac{\partial f}{\partial x}+\beta_2\frac{\partial f}{\partial y}+\gamma_2 n$$

משמע $X=Y$ (שוויון של נגזרות מעורבות)

לכן $\alpha_1=\alpha_2\ ,\ \beta_1=\beta_2\ ,\ \gamma_1=\gamma_2$

מהשוואת ביטויי ה- X נקבל

$$\alpha_1=\underbrace{\frac{\partial\Gamma_{11}^1}{\partial x}+\Gamma_{11}^1\Gamma_{21}^1+\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1}_{\text{פנימי 1}}+La_{21}$$

$$\alpha_2=\underbrace{\frac{\partial\Gamma_{21}^1}{\partial x}+\Gamma\Gamma+\Gamma\Gamma}_{\text{פנימי 2}}+Ma_{11}$$

$\Leftarrow$ פנימי 1 $+La_{21}=$ פנימי 2 $+Ma_{11}$.

$\Rightarrow La_{21}-Ma_{11}=$ פנימי

$$La_{21}-Ma_{11}\overset{\shortparallel}{=}\frac{LNF-LMG+MLG-M^2F}{EG-F^2}=F\cdot\frac{(LN-M^2)}{EG-F^2}=F\cdot k$$

<u>הגדרה:</u> מסילה γ (על משטח M) נקראת גאודזית אם עקמומית $\kappa_g(s)=0$ לכל s. זה מושג פנימי.

<u>הערה:</u> זה שקול ל: $\gamma''(s)=\kappa_g(s)\cdot S+\kappa_n(s)\cdot n$

$p=\gamma(s)$ $\qquad \kappa^2=\kappa_g^2+\kappa_n^2$

(א) γ גאודזית אמ"מ $\gamma''(s)\perp T_{\gamma(s)}$ לכל s. (תיאור חיצוני)

(ב) $\left(\gamma_1''+\Gamma_{11}^1(\gamma_1')^2+2\Gamma_{21}^1\gamma_1'\gamma_2'+\Gamma_{22}^1{\gamma_2'}^2\right)\frac{\partial f}{\partial x}$ (תיאור פנימי)

$+\left(\gamma_2''+\ldots\ldots\ldots\right)\frac{\partial f}{\partial y}=\kappa_g\cdot S=0$

(א) $\Rightarrow$ כל מעגל גדול ב S_2 הינו גאודזי.

16/7/08

הכל בנקודה $e(t)$

$$\ddot{\gamma}(t)=\overbrace{[\ddot{e}_1(t)+\Gamma_{11}^1\dot{e}_1(t)^2+2\Gamma_{12}^1\dot{e}_1(t)+\Gamma_{22}^1\dot{e}_2(t)^2]}^{\alpha(t)}\frac{\partial f}{\partial x}+$$
$$+\underbrace{[\ddot{e}_2(t)+\Gamma_{11}^2\dot{e}_2(t)^2+2\Gamma_{12}^2\dot{e}_1(t)+\Gamma_{22}^2\dot{e}_2(t)^2]}_{\beta(t)}\frac{\partial f}{\partial y}+n\cdot$$ משהו

(דיפרנ׳ עם מקד"ם רציפים)

פיסה רגולרית $f:U\to M$, γ מסילה על M, ז"א

$\gamma=f\circ e$ כאשר $e:[a,b]\to U$ דיפרנציאבילית פעמיים ברציפות.

$$\ddot{\gamma}(s)=\underbrace{\alpha(s)\frac{\partial f}{\partial x}+\beta(s)\frac{\partial f}{\partial y}}_{\kappa_g(s)\cdot S(e(s))}+n\cdot\text{משהו}$$

$$S=n\times T$$

γ היא גאודזית אם $\kappa_g(t)=0$ לכל t $\iff$ $\gamma''(s)\perp T_{e(s)}(M)$

<u>הערה</u>: אם M מישור, אז גאודזיות = קווים ישרים.

(כי אז התנאי $\gamma''(s)\perp T_{e(s)}(M)$ שקול ל $\gamma''(s)=0$)

תכונות של ישרים:

א) עקומה (כיוון קבוע) ישר.

ב) מסילה בעלת אורך מינימלי (בין כל המסילות העוברות דרך שתי נקודות) היא קטע של הישר.

ג) שתי נקודות קובעות ישר.

<u>טענה</u>: γ (בפרמטריזציה כלשהי) היא גאודזית אם $\alpha(t)=0=\beta(t)$

<u>הוכחה</u>: מהתנאי נובע ש $\ddot{\gamma}(t)\perp T_{e(t)}(M)$, בפרט $\ddot{\gamma}(t)\perp\dot{\gamma}(t)$, לכן

$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\dot{\gamma}(t)\|^2=\langle\dot{\gamma}(t),\ddot{\gamma}(t)\rangle=0 \Rightarrow k=\|\dot{\gamma}(t)\|$ קבוע, $0<k$.

ניקח $\delta(t)=\gamma(\frac{t}{k})$, δ היא פרמטריזציה של γ לפי אורך, כי

$\dot{\delta}(t)=\frac{1}{k}\dot{\gamma}(\frac{t}{k})$ $\quad$ $\gamma''(s)=\delta''(s)=\frac{1}{k^2}\ddot{\gamma}(\frac{t}{k})\perp T_{e(t)}(M)$

<u>משפט Picard</u> (n מימדי)

$F:[-\alpha,\alpha]\times B_n(b,\beta)\to\mathbb{R}^n$, $(s)\times(u_1,\dots,u_n)$, $(F_1,\dots,F_n)$

כך של הנגזרות $\frac{\partial F_j}{\partial u_i}$ רציפות.

אז קיימת פונקציה יחידה u ; $h\le\alpha$; $u:[-h,h]\to B(b,\beta)$

כך ש $u'(s)=F(s,u(s))$, $u(0)=b$.

משפט: $p\in M$, $0\neq v\in T_p(M)$ אזי קיימת גאודזית יחידה ומקסימלית γ, כך ש $\dot\gamma(0)=v$, $\gamma=f\circ e$ עם $e(0)=0\in R^2$, $f(0)=p$.

הוכחה:

צריך למצוא e כך ש $v=D_f(0)\dot e(0)$, $\dot e(0)=D_f^{-1}(0)v \overset{\shortparallel}{=} b$

וכך ש $\alpha(t)\equiv 0\equiv \beta(t)$.

במשפט Picard ניקח $n=2$ $\quad F(s,u_1,u_2)=$

$$=$$

$(u=e'(s))$

$$= -(\Gamma_{11}^1 u_1^2+2\Gamma_{12}^1u_1u_2+\Gamma_{22}^1u_2^2,\ \Gamma_{11}^2u_1^2+2\Gamma_{12}^2u_1u_2+\Gamma_{22}^2u_2^2)$$

$\beta=1$

מסקנה: קיים $h>0$ ו- ! $u:[-h,h]\to B(b,\beta)$, $u(0)=b$

$\dot u_1+\Gamma_{11}^1u_1^2+\ldots=0 \Rightarrow \alpha(t)=0$

$(\dot u_1=F_1(u_1,u_2))$

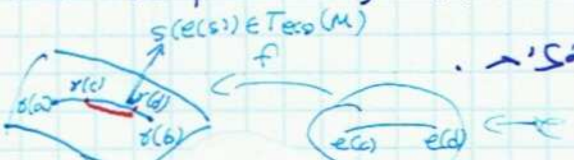
$\dot u_2+\Gamma_{11}^2u_1^2+\ldots=0 \Rightarrow \beta(t)=0$

ניקח $e_1(t)=\int_0^t u_1(s)ds$, $e_2(t)=\int_0^t u_2(s)ds$

$\dot e_i=u_i \quad \ddot e_i=\dot u_i$

משפט:

יהי $\gamma:[a,b]\to M$ מסילה, אם אורך γ הוא מינימלי (בין כל המסילות המחברות בין $\gamma(a)$, $\gamma(b)$), אזי γ גאודזית.



הוכחה:

נניח ש γ פרמטריזציה לפי אורך.

נניח בשלילה שהעקמומיות הגאודזית ב- s_0 איננה 0 (כלומר $k_g(s_0)\neq 0$),

בה"כ $0<k_g(s_0)$, מרציפות קיימים $c<s_0<d$ כך ש $k_g(s)>0$ לכל $s\in[c,d]$.

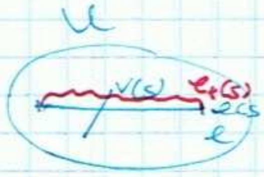
ברור ש $\gamma|_{[c,d]}$ היא בעלת אורך מינימלי בין $\gamma(c)$ ל $\gamma(d)$.

עבור $s\in(c,d)$ יהי $v(s)\in R^2$ כך ש $S(e(s))=D_f(e(s))v(s)$

(קיים כי D_f על).

נסמן $\lambda(s)=(s-c)(d-s)$, $\lambda(c)=\lambda(d)=0$

$\lambda(s)>0$ עבור $s\in(c,d)$. נסמן $\Phi(s,t)=e(s)+t\lambda(s)v(s)$



קיים $\varepsilon>0$ כך ש $\Phi(s,t)\in U$ לכל $-\varepsilon\le t\le\varepsilon$

$c\le s\le d$, נגדיר $\gamma_t(s)=\gamma(s,t)=f\circ\Phi(s,t)$

(בגלל הרציפות) $\quad \gamma_t(c)=\gamma(c)$

$$\gamma_t(d)=\gamma(d)$$

$$L(0)=\ell(\gamma) \le \ell(\gamma_t) \overset{\text{מינ}}{=} L(t) \Leftarrow$$

$$\gamma_0=\gamma$$

לכן $L'(0)=0$

$$L(t)=\int_c^d \left\| \frac{\partial\gamma}{\partial s}(s,t) \right\| ds$$

$$L'(t)=\frac{d}{dt}\int_c^d \left\| \frac{\partial\gamma}{\partial s}(s,t) \right\| ds = \int_c^d \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\left< \frac{\partial\gamma}{\partial s}(s,t), \frac{\partial\gamma}{\partial s}(s,t) \right>^{1/2}}_{\circledast} ds =$$

(נכון אם ⊛ גזיר).

$$= \int_c^d \frac{1}{2}\,\frac{2\left< \frac{\partial^2\gamma}{\partial s\partial t}(s,t), \frac{\partial\gamma}{\partial s}(s,t) \right>}{\left\| \frac{\partial\gamma}{\partial s}(s,t) \right\|} ds = \int_c^d \frac{\left< \frac{\partial^2\gamma}{\partial s\partial t}(s,t), \frac{\partial\gamma}{\partial s}(s,t) \right>}{\left\| \frac{\partial\gamma}{\partial s}(s,t) \right\|} ds$$

$$0=L'(0)=\int_c^d \left< \frac{\partial^2\gamma}{\partial s\partial t}(s,0), \frac{\partial\gamma}{\partial s}(s,0) \right> ds$$

אינטגרציה לפי חלקים:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left< \frac{\partial\gamma}{\partial t}(s,t), \frac{\partial\gamma}{\partial s}(s,t) \right> = \left< \frac{\partial^2\gamma}{\partial t\partial s}, \frac{\partial\gamma}{\partial s} \right> + \left< \frac{\partial\gamma}{\partial t}, \frac{\partial^2\gamma}{\partial s^2} \right>$$

$$\Rightarrow \quad L'(0)=\int_c^d \frac{\partial}{\partial s}\left< \frac{\partial\gamma}{\partial t}(s,0), \frac{\partial\gamma}{\partial s}(s,0) \right> ds - \int_c^d \left< \frac{\partial\gamma}{\partial t}(s,0), \frac{\partial^2\gamma}{\partial s^2}(s,0) \right> ds =$$

$$= \underbrace{\left< \frac{\partial\gamma}{\partial t}(s,0), \frac{\partial\gamma}{\partial s}(s,0) \right> \Big|_c^d}_{\overset{(\text{מ } \Delta\Delta)}{=0}} - \int_c^d \underset{>0}{\lambda(s)} \underbrace{\left< S(e(s)), \gamma''(s) \right>}_{=k_g(s) > 0} ds < 0$$

$$\frac{\partial^2\gamma}{\partial s^2}(s,0)=\gamma''(s)$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial s}(s,0)=\gamma'(s)$$

$$\Delta\Delta \quad \frac{\partial\gamma}{\partial t}(s,0)=D_f\,\Phi(s,0)\,\frac{\partial\Phi}{\partial t}(s,0) = \lambda(s)\cdot D_f(e(s))\,v(s) =$$

$$= \lambda(s)\,S(e(s))$$

רציפה: $f(s)>0$ $s\in(c,d)$
$\int f(s)\,ds>0$

$\Leftarrow$ $L'(0)<0$ בסתירה!

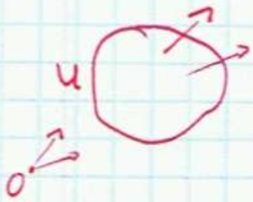
22/7/08

אינטגרציה וקטורית

מושג: $U\subseteq R^n$ קבוצה פתוחה. פונקציה רציפה $f:U\to R^n$ נקראת שדה וקטורי.

$f=(f_1,\dots,f_n)$ $\quad f_j:U\to R$ רציפה

$f(p)=T_p(U)=R^n$



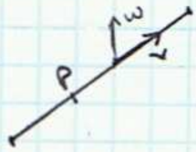
מסילה רציפה למקוטעין

הגדרה: תהי $\gamma:[a,b]\to U$. האינטגרל של f לאורך γ:

$$\int_\gamma \underbrace{\sum_{j=1}^n f_j\,dx_j}_{\omega} \overset{def}{:=} \int_a^b \underbrace{\langle f(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle}_{*}\,dt$$

מקרה הכי פשוט: $f\equiv w$ (וקטור קבוע), $\quad \gamma(t)=\overset{R^n}{\overset{\in}{p}}+tv \quad a\le t\le b$

$\dot\gamma(t)=v \quad \|v\|=1$



$$\int_a^b\langle w,v\rangle dt=\underbrace{(b-a)}_{\text{האורך של }\gamma}\cdot\underbrace{\langle w,v\rangle}_{\text{הכח ש-}f\text{ מפעילה על }\gamma}$$

כוח · אורך = העבודה

$$*=\sum f_j(\gamma(t))\cdot\underbrace{\dot\gamma_j(t)}_{dx_j(\gamma(t))}dt$$

טענה: אם $\delta:[c,d]\to U$ מסילה שקולה ל-γ, אזי $\int_\gamma\omega=\int_\delta\omega$

הוכחה: קיימת העתקה מונוטונית עולה ממש $\sigma:[a,b]\xrightarrow{\text{על}}[c,d]$ ש-$\gamma=\delta\circ\sigma$.

$$\int_\gamma\omega=\int_a^b\langle f(\delta(\sigma(t))), \dot\sigma(t)\cdot\dot\delta(\sigma(t))\rangle dt=$$

$$\overset{*}{=}\int_c^d\langle f\circ\delta(u), \dot\delta(u)\rangle du=\int_\delta\sum f_j\,dx_j$$

* הצבה $u=\sigma(t)\Rightarrow du=\dot\sigma(t)dt$

תכונות

(א) אדיטיביות מסילתית: $\int_{\gamma_1*\gamma_2}\omega=\int_{\gamma_1}\omega+\int_{\gamma_2}\omega$

מוגדר (* זה חיבור המסילות)

(ב) לינאריות: $g=(g_1,\dots,g_n)$ שדה אחר, אזי $\int_\gamma \alpha\omega+\beta\tau=\alpha\int_\gamma\omega+\beta\int_\gamma\tau$

נסמן $(\int\tau=\int\underbrace{\sum g_j\,dx_j}_{\tau}$

הערה: $\gamma^*(t)=\gamma(a+b-t)$, $\quad =\int_{\gamma^*}\omega=-\int_\gamma\omega$

$$=\int_a^b\langle f(\gamma(\underbrace{a+b-t}_{u})), -\dot\gamma(\underbrace{a+b-t}_{u})\rangle dt=-\int_a^b\langle f(\gamma(u)), \dot\gamma(u)\rangle du=-\int_\gamma\omega$$

<u>הגדרה:</u> שדה וקטורי f נקרא שדה משמר (ב-U) אם $\int_\gamma f$ תלוי רק ב
$\gamma(b)$ ו $\gamma(a)$.

<u>משפט:</u> שדה U קשירה מסילתית $f:U\to\mathbb{R}^n$ הינו משמר אמ"מ קיימת פונקציה (דיפרנציאבילית)
$g:U\to\mathbb{R}$ כך ש $f=\nabla g$. (g נקרא גם פוטנציאל וברור ש g יחידה עד כדי הקבוע) (U קשירה פתוחה)

<u>הוכחה:</u>

כיוון $\Rightarrow$ מניחים ש $f=\nabla g$ אזי

$$\int_a^b \underbrace{\langle \nabla g(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle}_{=(g\circ\gamma)^\bullet(t)} dt \underset{\text{מכלל השרשרת}}{=} \int_a^b (g\circ\gamma)^\bullet(t)\,dt = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))$$

23/7/08

פתוחה, קשירה מסילתית $U\subseteq R^n$

<u>משפט</u>: שדה וקטורי $f:\underset{\subseteq R^n}{U}\to R^n$ הינו משמר $\Longleftrightarrow$ קיימת פונקצית

פוטנציאל g עבור f, כך ש- $\underbrace{\nabla g(x)=f(x)}_{(*)}$ לכל $x\in U$.

<u>הוכחה</u>:

$\Leftarrow$ תהי $q\in U$ נקודה כלשהי. עבור $p\in U$ נגדיר $g(p)=\int_\gamma \sum f_j dx_j$ כאשר γ היא מסילה (רציפה למקוטעין) המקיימת $\gamma(a)=q$, $\gamma(b)=p$. מכיוון ש-f משמר, g מוגדר היטב.

צ"ל $(*)$, כלומר $f_i(p)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(g(p+te_i)-g(p))$. תהי γ כנ"ל. נגדיר $\delta_t:[0,t]\to R^n$ ע"י $\delta_t(s)=p+se_j$. U פתוחה לכן קיים ε כך ש-$\delta_t([0,t])\subseteq U$ עבור $|t|<\varepsilon$. כמובן $g(p+te_j)=\int_{\gamma*\delta_t}\sum f_i dx_i$

$$\gamma*\delta_t(s)=\begin{cases}\gamma(s) & a\le s\le b\\ \delta_t(s) & b\le s\le b+t\end{cases}$$

(פה $0<t$), מתקיים $g(p+te_j)-g(p)=\int_{\gamma*\delta_t}\sum f_i dx_i$

$$g(p+te_j)-g(p)=\int_{\gamma*\delta_t}\sum f_i dx_i= \quad ** \quad =\frac{1}{t}\int_0^t f_j(p+se_j)\,ds \xrightarrow[t\to 0]{} f_j(p)$$

$$**=\frac{1}{t}\int_{\delta_t}\sum f_i dx_i=\frac{1}{t}(g(p+te_i)-g(p))$$

<u>תזכורת</u>: $F(0)=\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}\int_0^t \underset{\text{רציפה}}{F(s)}\,ds$

<u>הערה</u>: תהי $f:U\to R^n$ ($f=(f_1,\dots,f_n)$) שדה וקטורי דיפרנציאבילי ברציפות. תנאי הכרחי לכך ש-f משמר (ב-U) הוא

$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)=\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ לכל $x\in U$ $(**)$ כי אם $f=\nabla g$

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}=\frac{\partial^2 g}{\partial x_i\partial x_j} \Leftarrow f_j=\frac{\partial g}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}=\frac{\partial^2 g}{\partial x_j\partial x_i} \Leftarrow f_i=\frac{\partial g}{\partial x_i}$$

<u>מושג</u>: שדה המקיים את $(**)$ קרוי משמר לוקלית.

<u>דוגמא</u>: $f=\Big(\underbrace{-\frac{y}{x^2+y^2}}_{Q},\underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{P}\Big)$, $R^2\setminus\{0,0\}$

צריך לבדוק ש- $\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial x}$

$$\frac{\partial Q}{\partial y}=-\frac{1(x^2+y^2)-2y^2}{x^2+y^2}=\frac{-x^2+y^2}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} = \frac{\partial P}{\partial x}$$

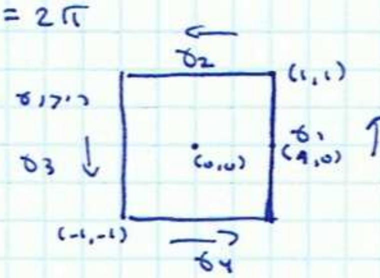
<u>הגדרה</u>: שדה f משמר ב-U אמ"מ $\int_\gamma \sum f_j dx_j = 0$. לכל מסילה סגורה ב-$U$ $\gamma(a)=\gamma(b)$.

<u>דוגמאות</u>

(א) $\gamma(t)=(\cos t,\sin t)$ $\quad 0\le t\le 2\pi$

$\int_\gamma = \int_0^{2\pi} \langle(t\sin t,\cos t),(-\sin t,\cos t)\rangle dt = 2\pi$ לא משמר.

(ב)



$$\int_\gamma = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4}$$

$\gamma_1(t)=(1,t) \qquad t\in[-1,1]$

$$\int_{\gamma_1} = \int_{-1}^{1} \langle(-\frac{t}{1+t^2},\frac{1}{1+t^2}),(0,1)\rangle dt = \int_{-1}^{1}\frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{\gamma_2} = -\int_{-1}^{1} \langle(-\frac{1}{1+t^2},\quad),(1,0)\rangle dt = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma = 4\cdot\frac{\pi}{2} = 2\pi$$

<u>משפט</u>: אם U הוא תחום כוכבי (כלומר קיים $q\in U$ כך ש $[p,q]\subseteq U$ לכל $p\in U$) אזי כל שדה משמר לוקלית ב-U הוא משמר.

<u>הוכחה</u>: מגדירים $g(x)=\int_0^1 \langle f(tx),x\rangle dt = \int_\gamma \sum f_j dx_j$ (בה"כ $q=0$)

כאשר $\gamma(t)=tx$.

f לא משמר גלובלית

הערה לכן, $\nabla g(r\cos t, r\sin t)=t$ עבור $R^2\setminus[0,\infty)\times\{0\}$

$\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

משפט: אם U תחום כוכבי (ז"א קיים $q\in U$ כך ש $[p,q]\subseteq U$ לכל $p\in U$)
אזי כל שדה משמר לוקלית ב-U הינו משמר.

מסקנה: שדה משמר לוקלית הינו "משמר מקומית" ז"א לכל $x\in U$ קיים $\varepsilon>0$ כך ש f משמר ב $B(x,\varepsilon)$, $D_f=D_f^*$ (**).
כוכבי

משפט Green

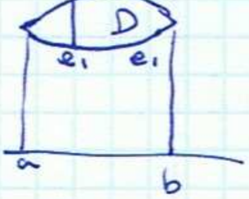
תהיינה $Q(x,y)$, $P(x,y)$ שתי פונקציות גזירות ברציפות ב-U.
$\gamma:[a,b]\to U$ מסילה פשוטה-סגורה גזירה ברציפות למקוטעין.
(פשוטה = חח"ע, סגורה = אותו ערך בקצוות, לכן שוויון הכוונה $\gamma(a)=\gamma(b)$
ו-γ חח"ע על $[a,b)$).
כך ש $\partial D=\gamma([a,b])$ כאשר D פתוחה, קשירה, בעלת נפח, חסומה.
אזי $\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy=\int_\gamma Q(x,y)dx+P(x,y)dy$, γ היא נגד כיוון השעון (ז"א $\det(\dot\gamma(t),\ddot\gamma(t))\geq 0$)

"הוכחה"

נניח ש γ שווה ל $\gamma_1 * \gamma_2^*$ כאשר $\gamma_1,\gamma_2:[a,b]\to U$, $\gamma_1(x)=(x,\varphi_1(x))$
$\gamma_2(x)=(x,\varphi_2(x))$
$\gamma_1(a)=\gamma_2(a)$ $\gamma_1(b)=\gamma_2(b)$
$\varphi_1(x)<\varphi_2(x)$ עבור $x\in(a,b)$ וגם γ שווה ל $\gamma_3*\gamma_4^*$ כאשר
$\gamma_3,\gamma_4^*:[c,d]\to U$, $\gamma_3(y)=(\psi_1(x),y)$
$\gamma_4(y)=(\psi_2(x),y)$

(γ_i רציפות $1\le i\le 4$)

הוכחה:



$$\iint_D\frac{\partial Q}{\partial y}dxdy \underset{\text{Fubini}}{=} \int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)\,dy\right)dx =$$

$$\underset{\text{(ניוטון לייבניץ)}}{\overset{N-L}{=}} \int_a^b[Q(x,\varphi_2(x))-Q(x,\varphi_1(x))]dx$$

$$\int_\gamma Q(x,y)dx+0dy=\int_{\gamma_1}-\int_{\gamma_2}=\int_a^b\langle(Q(x,\varphi_1(x)),0),(1,\text{משהו})\rangle dx$$

$$-\int\langle(Q(x,\varphi_2(x)),0),(1,\text{משהו})\rangle dx=\int_a^b(Q(x,\varphi_1(x))-Q(x,\varphi_2(x)))dx$$

$$-\iint \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy = \int_\gamma Q(x,y) \quad \Leftarrow$$

<u>שימוש</u>: $P(x,y)=x \qquad Q(x,y)=0$

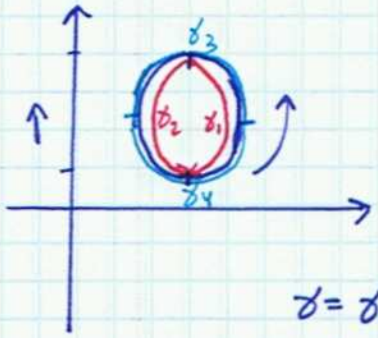
ואז נקבל:

$$V_2(D)=\iint_D dx\,dy = \int_\gamma x\,dy = \int_a^b \gamma_1(t)\,\dot{\gamma}_2(t)\,d$$

אפשר להגיע לנוסחה הנ״ל גם עם $P(x,y)=0\,,\ Q(x,y)=-y$

או עם $P(x,y)=\frac{1}{2}x\,,\ Q(x,y)=-\frac{1}{2}y$.

29/7/08



$$\iint \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_\gamma Q\,dx$$

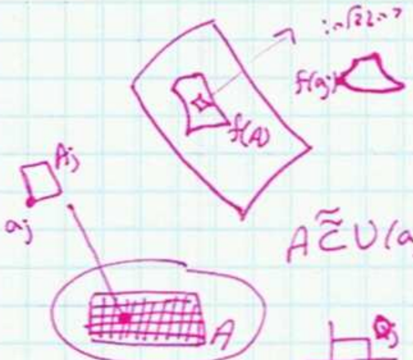
$$\iint \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy = \int_\gamma P\,dy$$

$\gamma = \gamma_1 * \gamma_2^*$

$\gamma = \gamma_3^* * \gamma_4$

<u>הגדרה:</u> תהי M משטח, $f:U\to M$ ($U\subseteq\mathbb{R}^2$) פיסה רגולרית, $A\subseteq U$ קבוצה סגורה. מגדירים

$$\sigma_f(f(A)) = \iint_A \underbrace{\underbrace{\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\times\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right\|}_{=S_f(x,y)\ =\ \sqrt{EG-F^2}}\,dx\,dy}_{d\sigma(x,y)}$$



$A \mathrel{\tilde{\subseteq}} \bigcup (a_j+Q_j)$

מלבן Q_j

A_j זה הצבת המלבן Q_j מהראשית ל a_j.

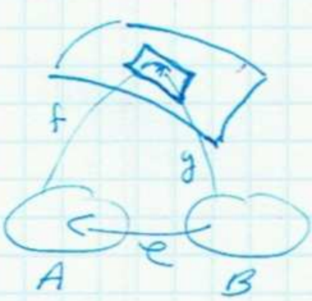
$f(A_j) \approx f(a_j) + Df(a_j)Q_j$

$$r(f(a_j)+Df(a_j)Q_j) = S_f(a_j)\cdot r(a_j) =$$
$$= \left\|\frac{\partial f}{\partial x}(a_j)\times\frac{\partial f}{\partial y}(a_j)\right\| r(a_j)$$

$$\sigma(f(A)) = \sum \sigma_f(A_j) \approx \sum S_f(a_j)\cdot \underbrace{r(a_j)}_{r(a_j+Q_j)} =$$
$$= \iint_A S_f(x,y)\,dx\,dy$$

<u>טענה:</u> יהיו f,U,A כנ"ל, תהי $g:V\to M$ פיסה רגולרית, $B\subseteq V$ קבוצה כך ש $f(A)=g(B)$ אזי $\sigma_f(f(A)) = \sigma_g(g(B))$.

<u>הוכחה:</u>



(f, g הומיאומורפיזם)

נגדיר $e=f^{-1}g$, לפי חילוף משתנה

$$\iint_{A=e(B)} \overbrace{F(x,y)}^{S_f(x,y)\ \text{ניקח}}\,dx\,dy = \iint_B \overbrace{F(e(s,u))}^{S_f(e(s,u))}\ \underbrace{\overbrace{Je(s,u)}^{Je(s,u)}}_{\text{יעקוביאן}}\,ds\,du$$

צ"ל: מספיק להראות $S_f(e(s,u))\,Je(s,u) = S_g(s,u)$

מתקיים $Tu\times Tv = \det T\ u\times v$ ($T:V\to V$, $V\subseteq\mathbb{R}^3$, [illegible]) $\dim V = 2$

נזכיר:

$$T\left(\frac{\partial f}{\partial x}(e(s,u))\right) = \frac{\partial g}{\partial x}(s,u)$$

$$T\left(\frac{\partial f}{\partial y}(e(s,u))\right) = \frac{\partial g}{\partial y}(s,u) \quad \in T_p(M)$$

כאשר

$$p = f(e(s,u)) = g(s,u)$$

$$Sg(s,u) = |\det T| \, Sf(e(s,u))$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(e(s,u)) = Df(e(s,u))(1,0)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(s,u) = Dg(s,u)(1,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(e(s,u)) = Df(e(s,u))(0,1)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(s,u) = Dg(s,u)(0,1)$$

$$TDf = Dg \qquad \text{צריך}$$

$$T = Dg\,Df^{-1}$$

$$T = Dg(s,u)\,Df^{-1}(e(s,u))$$

$$\det T = J_e(s,u) = \det \underset{\substack{\shortparallel \\ Df^{-1}(e(s,u))\,Dg(s,u)}}{\underline{De(s,u)}}$$

מסקנה מלינארית: $T_1 : X \to Y$ לינארית $T_2 : Y \to X$ לינארית

מ"ו ממימד סופי.

אז: $T_2T_1 : X \to X$, $T_1T_2 : Y \to Y$ לינאריות ומתקיים

$$\det T_1T_2 = \det T_2T_1$$

$$\det Df^{-1}(e(s,u)) \cdot Dg(s,u) = \det T$$

<u>הגדרה:</u> תהי $D \subseteq M$. נניח שקיימות פיסות $f_i : U_i \to M$ $i = 1, \dots, N$

כאשר U_i פתוחות כך ש $\phi = f_j(U_j) \cap f_i(U_i)$ ל $i \neq j$.

אז $D = \cup \overline{f_i(U_i)}$.

אז: מגדירים

$$\sigma(D) = \sum_{i=1}^{N} \sigma(f_i(U_i))$$