20/5/08

$1 \le \sum_{j=1}^{N} 1_{V_j}(x)$ עבור $x\in A$ ← הפונקציה האופיינית / אינדיקטור

משפט/הגדרה:

$A\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקטית, $V_1,\dots,V_N$ כיסוי פתוח של A, אזי

קיימות פונקציות רציפות $\varphi_j:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $j=1\dots N$, כך ש

$\operatorname{supp}\varphi_j := \{x \mid \varphi_j(x)\neq 0\}\subset V_j$, $\sum_{j=1}^{N}\varphi_j(x)=1$ עבור כל $x\in A$!

$0\le\sum\varphi_j(x)\le 1$ לכל x

אומרים אז ש $\{\varphi_1,\dots,\varphi_N\}$ הוא פירוק היחידה של A ביחס ל $\{V_1,\dots,V_N\}$.

למה: קיימות קבוצות קומפקטיות $A_1,\dots,A_N$ כך ש $A\subset\bigcup_{j=1}^{N}A_j$ ו $V_j\supset A_j$!

הוכחה: לכל $x\in A$ יהי $j(x)$ ו $r(x)>0$ כך ש $x\in V_{j(x)}$ ו $\overline{B(x,r(x))}\subset V_{j(x)}$. מכיוון ש $\{B(x,r(x))\}_{x\in A}$ הוא כיסוי פתוח של A, אז קיימים $x_1,\dots,x_m$ כך ש $A\subseteq\bigcup_{i=1}^{m}B(x_i,r(x_i))$

נגדיר $A_j=\bigcup_{\{i \mid j(x_i)=j\}}\overline{B(x_i,r(x_i))}$

הוכחת המשפט:

תהי $\psi_j:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה כך ש $0\le\psi_j(x)\le 1$ לכל x

ו: $\psi_j(x)=\begin{cases}1 & x\in A_j\\ 0 & x\notin V_j\end{cases}$

נגדיר $\varphi_1=\psi_1$

$\varphi_{j+1}=(1-\psi_1)(1-\psi_2)\cdots(1-\psi_j)(\psi_{j+1})$ כך למשל $\varphi_2=(1-\psi_1)\psi_2$

רואים $\sum_{i=1}^{j}\varphi_i = 1-(1-\psi_1)\cdots(1-\psi_j)$

מוכיחים באינדוקציה:

ל $j=1$: $\sum_{i=1}^{1}\varphi_i=\varphi_1=\psi_1 = 1-(1-\psi_1)$ ✓

נניח ל j ונוכיח ל $j+1$:

$$\sum_{i=1}^{j+1}\varphi_i = \sum_{i=1}^{j}\varphi_i+\varphi_{j+1} \underset{\text{מהנ"א}}{=} 1-(1-\psi_1)\cdots(1-\psi_j)+(1-\psi_1)\cdots(1-\psi_j)(\psi_{j+1})$$

$$= 1-(1-\psi_1)\cdots(1-\psi_{j+1})$$

ואינדוקציה

בפרט $\sum_{i=1}^{N}\varphi_i(x)=1-(1-\psi_1(x))\cdots(1-\psi_N(x))$ לכל x

$x\in A \Leftarrow$ קיים j כך ש $x\in A_j \Leftarrow \psi_j(x)=1$.

$\blacksquare$

$U\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה, $g:U\to\mathbb{R}^n$ דיפרנציאבילית ברציפות חח"ע ב U

$Dg(x)\in GL(n)$ $x\in U$, אז לכל $x\in U$

נגיד ש $G\subseteq\mathbb{R}^n$ מקיימת $(*_G)$ אם לכל $f:\bar{G}\to\mathbb{R}$ רציפה

מתקיים $$(*_G):\ \int_G f(g(t))\cdot|\det J_g(t)|\,dt=\int_{g(G)}f(x)\,dx$$

<u>המטרה</u>: להוכיח $(*_U)$ מתקיים.

<u>הבחנה</u>: לכל $x\in U$ קיימת סביבה $x\in \overset{V(x)}{\overset{\parallel}{V}}\subseteq U$ כך ש $(*_V)$ מתקיימת

<u>טענה</u>: יהי $A\subseteq U$ קבוצה קומפקטית אזי $(*_A)$ מתקיימת.

<u>הוכחה</u>: יהיו $x_1,\dots,x_N\in A$ כך ש $A\subseteq\bigcup_{j=1}^N V_{x_j}$ (מקומפקטיות של A).

נסמן $V_j=V_{x_j}$. יהיו $\varphi_1,\dots,\varphi_N$ פירוק היחידה ב $g(A)$ ביחס ל $\{g(V_j)\}$. לפי $(*_{V_j})$ מתקיים:

$$\int_{V_j}\varphi_j(g(t))\cdot f(g(t))\cdot|\det J_g(t)|\,dt=\int_{f(V_j)}\varphi_j(x)\cdot f(x)\,dx$$

נחליף ב-U

זה נכון כי: $\varphi_j=0$ מחוץ ל V_j

נחליף ב $f(U)$

לכן נחליף ל:

$$\int_U\sum_{j=1}^N\varphi_j(g(t))\cdot f(g(t))\cdot|\det J_g(t)|\,dt=$$

$$=\int_{f(U)}\sum_{j=1}^N\varphi_j(x)\cdot f(x)\,dx$$

המשך בדף הבא...

21/5/08

$U \subseteq R^m$ פתוחה (בעלת נפח) $g: U \to R^n$ דיפרנציאבילית ברציפות ב- $\bar{U}$, חח"ע

ו- $\det J_g(x) \neq 0$ לכל $x \in U$.

(למה) $A \subseteq U$ קומפקטי, אז קיימות $e_1 \dots e_N$ רציפות מ-U ל-R

כך ש- $\sum e_j(x) = 1$ עבור $x \in g(A)$, $0 \leq \underbrace{\sum e_j(x)}_{e(x)} \leq 1$ לכל x, כך שלכל

פונקציה רציפה $f: \bar{U} \to R$:

$$* \quad 0 = \int_U e(g(t)) \cdot f(g(t)) \cdot |\det J_g(t)| \, dt - \int_{g(U)} e(x) \cdot f(x) \, dx$$

רוצים

$$** \quad \delta = \overbrace{\int_U}^{\int_{U \setminus A} + \int_A} f(g(t)) \cdot |\det J_g(t)| \, dt - \underbrace{\int_{g(U)} f(x) \, dx}_{\int_{g(U \setminus A)} + \int_{g(A)}} = 0$$

($\int_{g(A)}$ ו- $\int_A$: משתווים לפי * ו- ** !)

$$|\delta| = \Big| \underbrace{\int_{U \setminus A} F(t) \, dt}_{\shortparallel} - \int_{g(U \setminus A)} \overset{(1-e(x))f(x)}{\Downarrow} \, dx \Big| \leq v(U \setminus A) \cdot \max_{t \in \bar{U}} |F(t)| + v(g(U \setminus A)) \cdot \max_{x \in g(\bar{U})} |f(x)|$$

רציפה ב- $\bar{U}$ קומפקטי

קומפקטי – תמונה של רציפה של קומפקטי

$F(t) = (1 - e(g(t))) \cdot f(g(t)) \cdot |\det J_g(t)|$

(מ- *-**)

אפשר לקחת A כך ש- $v(U \setminus A)$ קטן כרצוננו כי U בעלת נפח.

$$v(g(G)) \leq \max_{x \in G} \|Dg(x)\|^n \cdot v(G)$$

לכן $|\delta|$ קטן כרצוננו, וכקבוע נקבל שהוא חייב להיות 0 לכן

$\Leftarrow \delta = 0$.

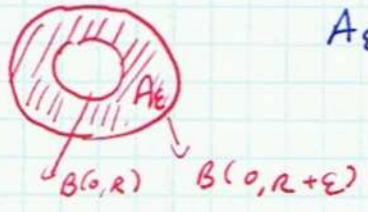
משפט: תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה אשר תלויה ב $\|x\|=r$ בלבד,
כ"ו $f(x)=\varphi(\|x\|)$ עבור $x\in\mathbb{R}^n$ עם $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ רציפה.

$$\int_{B(0,R)} f(x)\,dx = n\cdot \underbrace{V_n}_{\text{נפח n-מימד.}}(B(0,1))\int_0^R \varphi(r)\cdot r^{n-1}\,dr$$

הוכחה

נתבונן ב $\frac{F(R+\varepsilon)-F(R)}{\varepsilon}$ ל $\varepsilon>0$.

$$A_\varepsilon := B(0,R+\varepsilon)\setminus B(0,R)$$



$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{A_\varepsilon} f = \frac{F(R+\varepsilon)-F(R)}{\varepsilon}$$

$$\min_{R\le t\le R+\varepsilon}\varphi(t)\cdot V(A_\varepsilon)\le\int_{A_\varepsilon} f\le\max_{R\le t\le R+\varepsilon}\varphi(t)\cdot V(A_\varepsilon)$$

$$\Rightarrow\quad \frac{F(R+\varepsilon)-F(R)}{\varepsilon}\le\max_{R\le t\le R+\varepsilon}\varphi(t)\cdot\frac{(R+\varepsilon)^n-R^n}{\varepsilon}V_n(B(0,1))$$

$$\underbrace{\min_{R\le t\le R+\varepsilon}\varphi(t)}_{\varphi(R)}\cdot\underbrace{\frac{(R+\varepsilon)^n-R^n}{\varepsilon}}_{nR^{n-1}}\cdot\underbrace{V_n(B(0,1))}\le\frac{F(R+\varepsilon)-F(R)}{\varepsilon}$$

נשאיף את ε ל 0 . $V_n(B(0,1))$ קבוע. nR^{n-1} בהגדרה. $\varphi(R)$ ברציפות.

$$(\ V(B(0,R))=R^n V(B(0,1))\ )$$

$$F'(R)=n\cdot V_n(B(0,1))\varphi(R)R^{n-1}$$

דוגמא $f(x)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\cdot e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}\cdot(e^{\frac{x^2}{2}})\cdots\chi^2_{n-1}}$?

התפלגות חי בריבוע

הסתברות $P(a<\|x\|<b)=\int_{a<\|x\|<b} f(x)=n\cdot V_n(B(0,1))(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\cdot\int_a^b r^{n-1}e^{-\frac{r^2}{2}}\,dr$

הגדרה: מסילה (ב-$\mathbb{R}^n$) = פונקציה רציפה $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, מתאים לה הקו $f([a,b])\subseteq\mathbb{R}^n$.

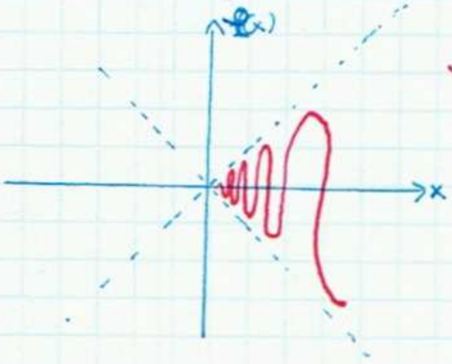
דוגמא: $\underbrace{f(t)=(\cos t,\sin t)}_{\text{המעגל}}$, $0\le t\le 2\pi$. פרמטריזציה

הגדרה: אורך של מסילה f: בסימון $\ell(f)$.

$$\ell(f):=\sup_T\{\underbrace{\sum\|f(t_i)-f(t_{i-1})\|}_{S_f(T)}: a\le t_0<t_1<\dots<t_N\le b\}$$

$T: t_0<t_1<\dots<t_N$ חלוקה של $[a,b]$

אומרים ש f בעלת אורך אם $\ell(f)<\infty$, ייתכן $\ell(f)=\infty$.



דוגמא: $e(t)=\begin{cases} t\cos\frac{1}{t}, & t\neq 0\\ 0, & t=0\end{cases}$

ב $[0,1]$

$t_j=\frac{1}{j\pi}$ $\quad S_e(T_N)\ge\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j\pi}$

הרכבת מסילות $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$

$g:[b,c]\to\mathbb{R}^n$

$f(b)=g(b)$

אזי $f*g(t):=\begin{cases} f(t) & a\le t\le b\\ g(t) & b\le t\le c\end{cases}$ $\quad f*g:[a,c]\to\mathbb{R}^n$

מסילה **הפוכה**: $\bar{f}(x)=f(a+b-x)$

תכונות:

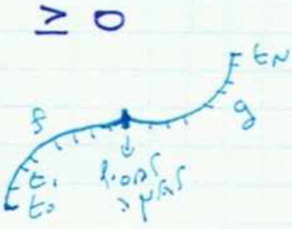
(0) אם $T\subseteq U$ אזי $S_f(T)\le S_f(U)$

מספיק לבדוק כאשר $U=T\cup\{u\}$

$T: t_0<t_1<\dots<t_N$

$U: t_0<\dots<t_j<u<t_{j+1}<\dots<t_N$

$$S_f(U)-S_f(T)=\|f(t_{j+1})-f(u)\|+\|f(u)-f(t_j)\|-\|f(t_{j+1})-f(t_j)\|$$
≥ 0



(1) $\ell(f*g)=\ell(f)+\ell(g)$

להראות $\le$

$\ge$

נניח ש f מסילה דיפרנציאבילית ברציפות, צ"ל

$$f(x)=(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$$

$$f'(x)=(f_1'(x), f_2'(x), \dots, f_n'(x))$$

$$J_f(x)=\begin{pmatrix} f_1'(x) \\ \vdots \\ f_n'(x) \end{pmatrix}$$

צ"ל כל אחת מ $f_1 \dots f_n$ גזירה ברציפות בקטע $[a,b]$.

<u>למה</u> $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ גזירה ברציפות, אזי $m(b-a)\le \ell(f)\le M(b-a)$ (*)

$$M=\max\{\|(f_1'(s_1), f_2'(s_2), \dots, f_n'(s_n))\| \mid a\le s_j\le b,\ j=1\dots n\}$$

$$m=\min\{\|(f_1'(s_1), f_2'(s_2), \dots, f_n'(s_n))\| \mid a\le s_j\le b,\ j=1\dots n\}$$

$$f'(s)=(f_1'(s), \dots, f_n'(s))$$

<u>הוכחה:</u> $m(t-u)\le \|f(t)-f(u)\|\le M(t-u)$

כי ש $f(t)-f(u)=(f_1(t)-f_1(u), \dots, f_n(t)-f_n(u))$

ולפי משפט ערך הממוצע

$u\le s_i\le t$ $\quad f_i(t)-f_i(u)=(t-u)f_i'(s_i)$ $\quad \forall\ 1\le i\le n$

$$\Rightarrow f(t)-f(u)=(t-u)\cdot(f_1'(s_1), \dots, f_n'(s_n))$$

עבור $u\le s_1, s_2, \dots, s_n\le t$ מסוימים

$$\Rightarrow |f(t)-f(u)|=(t-u)\cdot\underbrace{\|(f_1'(s_1), \dots, f_n'(s_n))\|}_{\text{חסום בין M ו m}}$$

עכשיו (*) נובע שלכל חלוקה $T: a=t_0<t_1\dots<t_N=b$

שהרי $m(b-a)\le S_f(T)\le M(b-a)$

$$\underbrace{\sum(t_i-t_{i-1})}_{b-a}m\le \sum\|f(t_i)-f(t_{i-1})\|\le \underbrace{\sum(t_i-t_{i-1})}_{b-a}M$$

<u>סימון:</u> $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ מסילה.

$$\sigma_f(t)=\ell(f|_{[a,t]}),\ a\le t\le b$$

<u>משפט:</u> $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ גזירה ברציפות. אזי לכל $t\in[a,b]$ $\sigma_f'(t)=\|f'(t)\|$. ולכן

$$\ell(f)=\sigma_f(b)=\int_a^b\|f'(t)\|dt$$

הוכחה

נתבונן ב $\delta>0$ $\sigma_f(t+\delta)-\sigma_f(t)$

נשים לב ש $f_{[a,t+\delta]} = f_{[a,t]} * f_{[t,t+\delta]}$

לכן $\frac{1}{\delta}\left(\sigma_f(t+\delta)-\sigma_f(t)\right)=\frac{1}{\delta}\ell\left(f_{[t,t+\delta]}\right) = I$

לפי הלמה

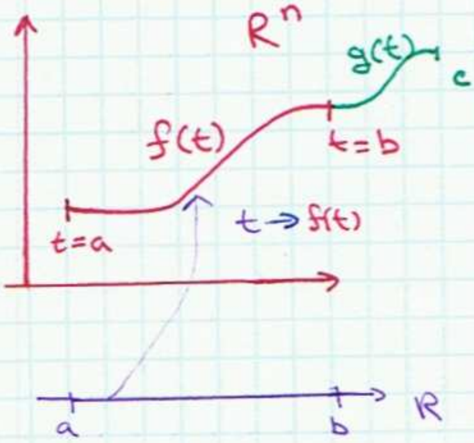
$$I \le \max_{t\le s_j\le t+\delta} \|(f'_1(s_1),\ldots,f'_n(s_n))\| \qquad j=1..n$$

$$I \ge \min_{t\le s_j\le t+\delta} \|(f'_1(s_1),\ldots,f'_n(s_n))\|$$

משאיפים את δ ל- 0. אזי $\delta\to 0$

נקבל $\|f'(t)\|=\|(f_1'(t),f_2'(t),\ldots,f'_n(t))\|$

27/5/08



$$\ell(t) := \sup \sum_{i=1}^{k} \| f(t_i) - f(t_{i-1}) \|$$

$t_k = b$
$t_0 = a$

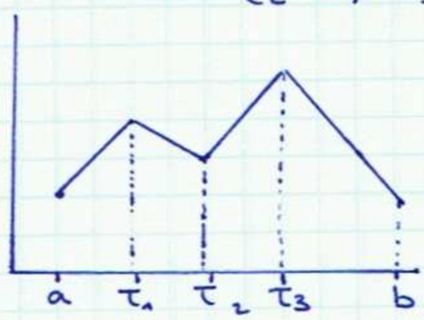
$f * g$
זהו חיבור המסילות

$$⊛ \quad \ell(t) = \int_a^b \| f'(t) \| dt$$

$f \in C^1([a,b], R^n)$
f גזירה ברציפות.

__הערה:__ הנוסחה ⊛ נכונה גם אם f גזירה ברציפות למקוטעין,
כלומר f רציפה וקיימות מס' סופי של נקודות ש:
(i) f גזירה ברציפות לכל $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ $\overset{\tau_0}{a} < \tau_1 < \dots < \tau_\ell < \overset{\tau_{\ell+1}}{b}$ (קיימים
הנגזרות).

(ii) יתכן קפיצה של $f'(t)$ ב- τ_i



__הוכחה__

ברור שאגף ימין ב-⊛ מוגדר היטב. מצד שני, מתקיים שמתקיים

$$\ell_{[a,b]}(f) = \sum_{j=0}^{\ell} \ell_{[\tau_j, \tau_{j+1}]}(f)$$

כי לכל חלוקה של $[a,b]$ ניתן לעדנו עידון שיכיל גם את ה- $\{\tau_i\}$,
ולכן $\sup_{[a,b]} \sum_{k=0}^{J} \| f(t_{k+1}) - f(t_k) \| = \sum_{[\tau_i, \tau_{i+1}]} \sup_{t_k \in [\tau_i, \tau_{i+1}]} \sum \| f(t_{k+1}) - f(t_k) \|$
(כאשר $t_0 = a < t_1 < \dots < t_J = b$)

__סימון:__ יהי $t \in [a,b]$! f מסילה בעלת אורך. נסמן ב- $\sigma_f(t)$
את אורך המסילה על $[a,t]$.

<u>טענה:</u> $\sigma_f(t)$ פונקציה עולה של t. היא עולה ממש אמ"מ f אינה קבועה באף קטע. (זאת תהיה תמיד <u>ההנחה</u> בהמשך).

<u>הסבר:</u> "f איננה קבועה באף קטע" פירושו: לא קיים $[c,d]\subseteq[a,b]$, $d>c$ וכך ש $f(t)=f(c)$, $c\le t\le d$.

<u>הוכחה:</u> אם קיים כזה קטע, אזי $\sigma_f(d)=\sigma_f(c)$ ולכן $\sigma_f(t)$ אינה עולה <u>ממש</u>. להיפך, נניח ש- $\sigma_f(t)$ אינה עולה ממש, כלומר $\sigma_f(d)=\sigma_f(c)$ עבור $a\le c<d\le b$. אבל

$$l_{[c,d]}(f)\ge\|f(d)-f(c)\|$$

ואם הוא שווה ל-0 (כלומר, $\sigma_f(d)-\sigma_f(c)=0$) $\Longleftarrow f(d)=f(c)$

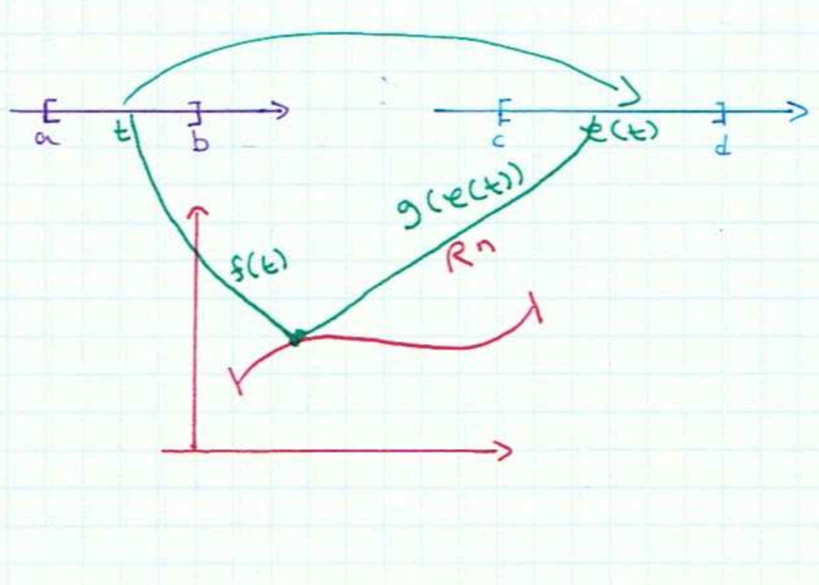
כעת ניקח כל $c\le\bar{d}\le d$ במקום d נשים $\bar{d}$ ונקבל $f(c)=f(\bar{d})$ לכל $c\le\bar{d}\le d$.

<u>הערה:</u> אם f גזירה ברציפות למקוטעין (עם אי רציפות), אזי $\sigma_f(t)$ רציפה, כפי שראינו מהנוסחא ⊛. למעשה אם $t\ne\tau_i$,

$$\sigma_f'(t)=\|f'(t)\|$$

$\Leftarrow$ במצב זה, $\sigma_f(t)$ גזירה ברציפות למקוטעין.

<u>הגדרה:</u> נאמר כי המסילות $\{f,[a,b]\}$, $\{g,[c,d]\}$ ($f:[a,b]\to R^n$, $g:[c,d]\to R^n$) הן שקולות $f\sim g$,
אם קיימת העתקה חח"ע $\varphi:[a,b]\to[c,d]$ (כלומר $\varphi(a)=c$, $\varphi(b)=d$ שומרת כיוון)
כך ש $g(\varphi(t))=f(t)$ ($t\in[a,b]$, $\varphi(t)\in[c,d]$)



$f\sim g$ הוא יחס שקילות:

1) רפלקסיביות $f\sim f$

2) סימטריות $g\overset{\varphi^{-1}}{\sim}f \Leftarrow f\overset{\varphi}{\sim}g$

3) טרנזיטיביות $f\overset{\varphi\circ\psi}{\sim}h \Leftarrow g\overset{\psi}{\sim}h$ ו $f\overset{\varphi}{\sim}g$

<u>טענה</u>: אם $f\sim g$ אזי $\ell(f)=\ell(g)$

<u>הוכחה</u>:
$$\underbrace{\sum_{i=1}^{J}\|f(t_i)-f(t_{i-1})\|}_{A}=\underbrace{\sum_{i=1}^{J}\|g(\varphi(t_i))-g(\varphi(t_{i-1}))\|}_{B}$$

ניקח $\sup$ על 2 הצדדים. אז

$$\sup A=\ell(f)\leq\sup B$$

$$\Rightarrow \ell(f)=\ell(g)$$

מטעמי סימטריה.

תרגיל למחשבה: איזה תנאי צריך כדי שפונ' האורך תהיה רציפה?

28/5/08

$f:[a,b]\to R^n$ רציפה $\Leftarrow$ מסילה

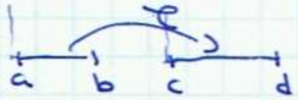
מסילה בעלת אורך

אם $f'(t)$ גזירה ברציפות (למקוטעין) $l(f)=\int_a^b\|f'(t)\|dt$

$\sigma_f(t)$ - האורך של המסילה על $[a,t]$ $a\le t\le b$ ואם f גזירה

ברציפות, $\sigma_f'(t)=\|f'(t)\|$.

$f\sim g$

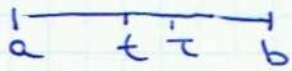


$g\circ\varphi=f$ $l(f)=l(g)$

$\sigma_f(t)$ עולה ממש $\Leftarrow$ $f(t)$ אינה קבועה על קטע.

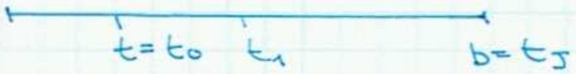
<u>טענה</u>: תהי $f:[a,b]\to R^n$ מסילה בעלת אורך, אזי $\sigma_f(t)$ פונקציה רציפה על $[a,b]$.

<u>הוכחה</u>:



$$\sigma_f(t+0)=\lim_{\tau\downarrow t}\sigma_f(\tau)\ge\sigma_f(t)$$

עלינו להראות כי $\sigma_f(t+0)=\sigma_f(t)$. כלומר, אם $\varepsilon>0$ קיים $\tau>t$ כך ש $\sigma_f(\tau)<\sigma_f(t)+\varepsilon$.



קיימת חלוקה של הקטע $[t,b]$ כך ש $\sum_{i=1}^{J}\|f(t_i)-f(t_{i-1})\|$ יהיה גדול מ $l(f_{[t,b]})-\varepsilon$

δ $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ ע"פ רציפות f כך שאם $|\tau-t|<\delta$ $\Leftarrow$ $\|f(\tau)-f(t)\|<\varepsilon$. בה"כ ניתן להניח ש $t_1-t<\delta$ (אחרת מעדנים נעדן את החלוקה כך ש t_1 קרוב מספיק ל t נמצא שם).

$$l(f_{[t_1,b]})\ge\sum_{i=2}^{J}\|f(t_i)-f(t_{i-1})\|>l(f_{[t,b]})-2\varepsilon$$

$$l(f_{[t,b]})=l(f_{[t,t_1]})+l(f_{[t_1,b]})\Rightarrow l(f_{[t,t_1]})<2\varepsilon\Rightarrow\sigma_f(t_1)-\sigma_f(t)<2\varepsilon$$

<u>מסקנה</u>: (תמיד $\sigma_f(t)$ עולה ממש):

בשינוי הפרמטר ניתן לקחת $e \equiv \sigma_f$, $[c,d]=[0,\ell_{[a,b]}(f)]$

<u>הגדרה אחרת</u>: קיימת למסילה f הצגה שקולה f^* כך ש- $\sigma_{f^*}(s)=s$

ההצגה השקולה הזאת (f^*) נקראת <u>פרמטריזציה לפי אורך</u>.

על מנת לגזור נוסחא כמו $f(t)=g(e(t))$ לפי t, צריך גם

ש $e(t)$ תהיה גזירה. ואז $\underset{\mathbb{R}^n}{f'(t)}=\underset{\mathbb{R}^n}{g'(e(t))}\cdot \underset{\mathbb{R}\text{ סקלר}}{e'(t)}$.

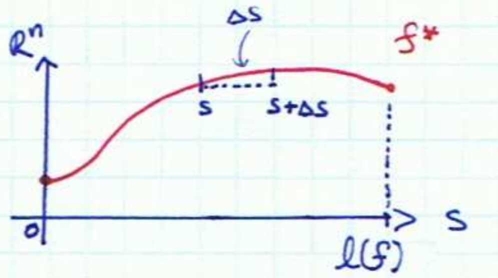
$s=e(t)=\sigma_f(t)$, $g=f^*$ ולכן $f'(t)=(f^*)'(s)\cdot\sigma_f'(t)$ (מקורי).

<u>נניח f גזירה ברציפות</u> ואז

$$f'(t)=(f^*)'(s)\cdot\|f'(t)\|$$

$$(f^*)'(s)=\frac{f'(t)}{\|f'(t)\|} \qquad (\sigma_f(t)=s).$$

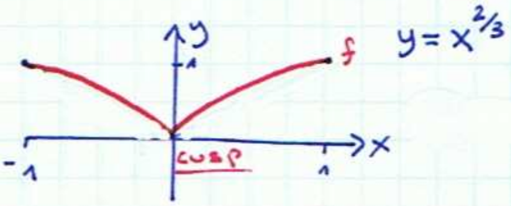
$$\left\|\frac{f^*(s+\Delta s)-f^*(s)}{\Delta s}\right\| \xrightarrow[\Delta s\to 0]{} 1$$



צריך לברר $f'(t)=0$?

ניקח $f(t)=(t^3,t^2)$

$-1\le t\le 1$



<u>הגדרה</u>: $f(t)$ מסילה <u>חלקה</u>/<u>רגולרית</u>, [illegible] $f'(t)\neq 0$ $\forall a\le t\le b$

<u>סימון</u>: להבא משתמשים ב- f גם במקום f^*.

כאשר $f(s)$ הצגה לפי פרמטר האורך.

$$f'(s)=\frac{\dot f(t)}{\|\dot f(t)\|} \qquad \|f'(s)\|=1$$

(משתמשים f' לפי s ; $\dot f$ לפי t)

(כש $f(s)$ הצגה לפי פרמטר האורך.

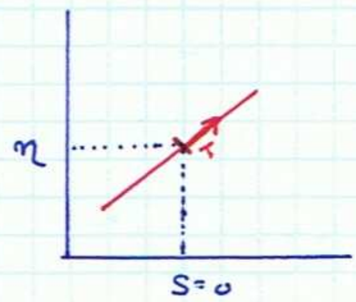
$f'(s)=T(s)$ המשיק המנורמל למסילה.

<u>דוגמאות:</u> 1) קו ישר $f(s)=\xi\cdot s+\eta$ $\quad \xi,\eta\in R^n$

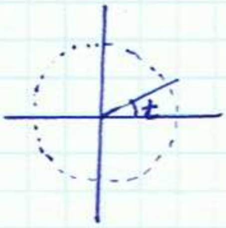
$\|\xi\|=\|f(s+1)-f(s)\|=1$.

ולכן $\xi=T(s)$

$f(s)=T\cdot s+\eta$



2) מעגל: ברדיוס $R>0$ $\quad f(t)=R(\cos t,\sin t)$ $\quad 0\le t\le 2\pi$



$S=R\cdot t$ אורך קשת בזוית t

$$f(s)=R\left(\cos\frac{s}{R},\sin\frac{s}{R}\right)$$
$$0\le s\le 2\pi R$$

$$f'(s)=\left(-\sin\frac{s}{R},\cos\frac{s}{R}\right)$$

$\|f'(s)\|=1$

<u>הגדרה:</u> תהי $f:[a,b]\to R$ מסילה חלקה ובעלת נגזרת שניה רציפה. אזי נגדיר את <u>העקמומיות ב- S</u> ע"י $0\le \chi(s):=\|f''(s)\|$.

<u>הערה:</u> אם $\ddot{f}(t)$ רציפה $\Leftarrow$ $f''(s)$ רציפה

<u>דוגמאות:</u>

1) ישר $\chi(s)=0$

2) מעגל $f''(s)=\frac{1}{R}\left(-\cos\frac{s}{R},-\sin\frac{s}{R}\right)=-\frac{1}{R^2}f(s)$

$$\Rightarrow \chi(s)=\|f''(s)\|=\frac{1}{R}$$

יותר עקום

$(\chi(s)=\frac{1}{R})$.

רדיוס העקמומיות $=\frac{1}{\chi(s)}$

ידוע עכשיו ש- $f'(s)$ הוא המשיק המנורמל. ההנחה תהיה תמיד של מסילה חלקה וגזירה פעמיים ברציפות.

(כאן $(\,,\,)$ זה $\langle \,,\, \rangle$ מכפלה סקלרית)

$$0=\frac{d}{ds}\underbrace{\left(f'(s),f'(s)\right)}_{\text{מכפלה סקלרית}}=\left(f''(s),f'(s)\right)+\left(f'(s),f''(s)\right)=$$

$$=2\left(f'(s),f''(s)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left(f'(s),f''(s)\right)=0$$

$\Leftarrow$ מסקנה $T(s)=f'(s)\perp \underbrace{f''(s)}_{\tilde{N}(s)}$

הנורמל הראשי של המסילה

$\tilde{N}(s)\perp T(s)$.

כדי שההגדרה תהיה משמעותית, נוסיף הנחה:

<u>הנחה</u>: העקמומיות $\kappa(s)\neq 0$. זה מבטיח ש- $f''(s)\neq 0$ $(\tilde{N}(s))$ ושלכן הנורמל הוא וקטור $\neq 0$. ניתן להגדיר את וקטור היחידה הנורמל הראשי $N(s)$

$$N(s):=\frac{\tilde{N}(s)}{\|\tilde{N}(s)\|}=\frac{T'(s)}{\kappa(s)}=\frac{f''(s)}{\|f''(s)\|}.$$

<u>הנחה קבועה</u>: $N(s)\neq 0$, $T(s)\Longrightarrow N(s)\perp T(s)$.

<u>הגדרה</u>: המישור המשיק למסילה $f(t)$ (בנקודה t) מוגדר ע"י:

$$f(t)+\underbrace{[\dot{f}(t),\ddot{f}(t)]}_{\text{זה בעצם ה-Span של } f'(t) \text{ ו- } f''(t)}=f^*(s)+\underbrace{\underline{[f'(s),f''(s)]}}_{\text{מישור}}$$

$=[T(s),N(s)]$

(הערה: $[f'(s),f''(s)]=[\dot{f}(t),\ddot{f}(t)]$

(המישורים הפרושים שווים), אבל <u>בוודאי לא</u> בהכרח $f'(s)=\dot{f}(t)$, $f''(s)=\ddot{f}(t)$)