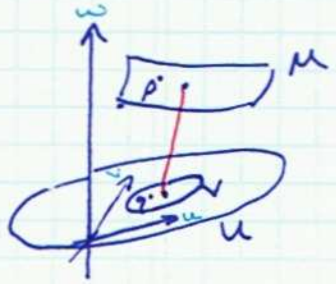
24/6/08

$f: U \to \underset{\text{משטח}}{M} \ni p = f(q)$ פיסה רגולרית.

$$n_f = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial y}}{\left\| \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial y} \right\|} \qquad n_f^{\perp}(q) = T_p(M) = D_f(q)R^2$$

<u>דוגמאות:</u>

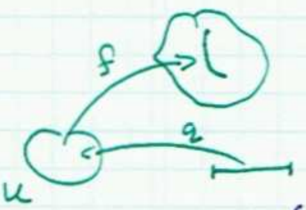


I) פיסת Monge $\varphi: U \to R$.

$$n(q) = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, 1\right)$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{matrix}$$

<u>מושג</u> (תכנוני): $\gamma: [a,b] \to M$ מסילה, אומרים שהמסילה <u>נמצאת על</u> f אם קיימת $\varphi: [a,b] \to \underset{\subseteq R^2}{U}$ חלקה כך ש- $\gamma = f \circ \varphi$.



<u>הערה:</u> 1) אם $g \sim f$ ו- γ נמצאת על f, אזי γ נמצאת על g. לכן אפשר להגיד ש- γ <u>נמצאת על</u> M.

2) γ גם כן חלקה (מכלל השרשרת). (כי f רגולרית ; יש חלקה).

חלקה = גזירה כך שהנגזרת (וקטור) לא מתאפסת.

<u>טענה:</u> אוסף כל הוקטורים מהצורה $\dot\gamma(t_0)$, כאשר $p = \gamma(t_0)$, γ נמצאת על M, שווה ל- $T_p(M)$.

<u>הוכחה:</u> "⊂" מיידי

$$\dot\gamma(t_0) = D_f(\underbrace{\varphi(t_0)}_{q}) \cdot \dot\varphi(t_0) \in T_p(M)$$

"⊃" אם $v \in T_p(M) = \text{span}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(q), \frac{\partial f}{\partial y}(q)\right\}$, $v = h\frac{\partial f}{\partial x}(q) + k\frac{\partial f}{\partial y}(q)$

$$\varphi: R \to R^2, \quad \varphi(t) = q + t(h,k)$$

קיים $\varepsilon > 0$ כך ש- $\varphi(t) \in U$ עבור $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ כי U פתוחה.

נבחר $\varphi: [-\varepsilon, \varepsilon] \to U$ כנ"ל. מקיים

$$\dot\gamma(0) = D_f(\underbrace{\varphi(0)}_{q}) \cdot \dot\varphi(0) = D_f(q)(h,k) = v$$

II) משטח הגובה $M = \{ (u,v,w)\in\mathbb{R}^3 : F(u,v,w)=c,\ \nabla F(u,v,w)\neq 0 \}$

יהי γ מסילה הנמצאת על M, ועוברת דרך p. נגדיר $\gamma(t_0)=p$.

נתבונן ב $F(\gamma(t))=c$. לכן $\frac{d}{dt}F(\gamma(t))=0$ (בפרט ב $t=t_0$). אזי

$$\frac{d}{dt}F(\gamma(t_0)) = \langle \nabla F(\underbrace{p}_{\gamma(t_0)}), \dot\gamma(t_0)\rangle = 0$$

לכן $T_p(M)=\nabla F(p)^{\perp}$, וכן $n_p(M) = \pm\frac{\nabla F(p)}{\|\nabla F(p)\|}$

ספירה $u^2+v^2+w^2=r^2$.
חרוט $u^2+v^2-w^2=0$.
היפרבולואיד $u^2+v^2-w^2=-r^2$.

אומרים ש M <u>אוריינטבילי</u> אם קיימת פונקציה רציפה $n:M\to \underbrace{S_2}_{\text{(הספירה)}}$ כך ש $n(p)\perp T_p(M)$ לכל p.

I וגם II נותנות אוריינטביליות.

25/6/08

$M\subseteq\mathbb{R}^3$ משטח רגולרי. $f:U\to M$ פיסר רגולרית. $M\ni p=f(v)$

$T_p(M)$, $\underset{\text{רציפה}}{p\mapsto n(p)}$.

<u>הגדרה</u>: התבנית היסודית הראשונה. $I_p(v,w)=\langle v,w\rangle$ עבור $v,w\in T_p(M)$. נבטא את $I_p(v,v)$ בעזרת f:

$h,k\in\mathbb{R}$ $\quad v=h\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(q)+k\frac{\partial f}{\partial x}(q)$

לא תלוי ב־ f $\quad I_p(v,v)=h^2\underbrace{\left\|\frac{\partial f}{\partial x}(q)\right\|^2}_{E}+2hk\underbrace{\left\langle\frac{\partial f}{\partial x}(q),\frac{\partial f}{\partial y}(q)\right\rangle}_{F}+k^2\underbrace{\left\|\frac{\partial f}{\partial y}(q)\right\|^2}_{G}=$

$=Q^1_q(h,k)$

תלוי ב־ f

כאשר $\quad Q^1_q(h,k)=Eh^2+2Fhk+Gk^2$

<u>הערה</u>: Q^1_q היא תבנית ריבועית מוגדרת חיובית (כלומר $Q^1(h,k)\geq 0$ ושווה 0 רק עבור $(0,0)$).

חישוב אורך מסילה הנמצאת על f. $\gamma=f\circ e$ כאשר $e:[a,b]\to U$:

תזכורת. $\dot\gamma(t)=Df(e(t))\cdot\dot e(t)=\dot e_1(t)\frac{\partial f}{\partial x}(e(t))+\dot e_2(t)\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(e(t))$

$$\ell(\gamma)=\int_a^b\|\dot\gamma(t)\|dt=\int_a^b\left[Q_{e(t)}(\dot e_1(t),\dot e_2(t))\right]^{1/2}dt$$

(כי $\|\dot\gamma(t)\|^2=Q_{e(t)}(\dot e_1(t),\dot e_2(t))$).

<u>עקמומיות</u>: $\gamma:[0,1]\to M$ מסילה גזירה פעמיים ברציפות מפרמטרית לפי אורך. $\gamma'(s)=T$.

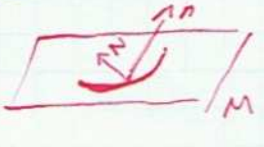
$\gamma''(s)$ וקטור העקמומיות (של γ ב־ s). $\quad\gamma(s)=p$

מגדירים frame $\quad n,T,S=n\times T$ (S מאונך [illegible] גזירות פעמיים)

כותבים $\quad\gamma''(s)=\underbrace{\kappa_n(s)\cdot n}_{\text{העקמומיות הנורמלית}}+\underbrace{\kappa_g(s)\cdot S}_{\text{העקמומיות הגאודזית}}$ $\quad$ ($\kappa_g(s)\cdot S\in T_p(M)$) כמו כן

$\kappa_n(s)=\langle\gamma''(s),n\rangle$, $\kappa_g(s)=\langle\gamma''(s),S\rangle$. $\quad N=\frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|}$ (אם לא 0)

(T,N,B)



הערה: $\langle S,N\rangle = \langle n\times T, N\rangle = \langle n,T,N\rangle = \langle n,B\rangle$

הערה: κ_n , κ_g לא תלויים ב-f. (תלויים ב-γ)

חישוב κ_g ו- κ_n : $\gamma:[a,b]\to M \qquad \gamma = f\circ\varphi$

$$\gamma'(s) = \frac{\dot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\|} = \dot\gamma(t)\cdot\frac{1}{\|\dot\gamma(t)\|}$$

$$\gamma''(s) = \frac{1}{\|\dot\gamma\|}\frac{d}{ds}\dot\gamma + \overbrace{\frac{d}{ds}\frac{1}{\|\dot\gamma\|}\cdot\dot\gamma}^{\in RT} =$$

$$= \frac{1}{\|\dot\gamma\|^2}\cdot\ddot\gamma + \text{לא מעניין}$$

$$\left(\frac{df}{ds} = \frac{df}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}\right)$$

$$\kappa_n = \frac{1}{\|\dot\gamma\|^2}\langle\ddot\gamma, n\rangle \ , \quad \kappa_g = \frac{\langle\ddot\gamma, S\rangle}{\|\dot\gamma\|^2} = \frac{\langle\ddot\gamma, n, T\rangle}{\|\dot\gamma\|^2} =$$

$$= \frac{\langle\ddot\gamma, n, \dot\gamma\rangle}{\|\dot\gamma\|^3} = \frac{\langle\dot\gamma, \ddot\gamma, n\rangle}{\|\dot\gamma\|^3}$$

מסקנה: κ_n תלוי רק ב- $\ddot\varphi$ שימו:

$$\kappa_n(t) = \frac{Q_q^2(\dot\varphi_1(t), \dot\varphi_2(t))}{\boxed{Q_q^1(\dot\varphi_1(t), \dot\varphi_2(t))}_{=\|\dot\gamma(t)\|^2}}$$

הוכחה:

$$\dot\gamma(t) = D_f(\varphi(t))\cdot\dot\varphi(t) = \dot\varphi_1(t)\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(\overbrace{\varphi(t)}^{q}) + \dot\varphi_2(t)\frac{\partial f}{\partial y}(\underbrace{\varphi(t)}_{q})$$

$$\ddot\gamma(t) = \ddot\varphi_1(t)\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t)) + \ddot\varphi_2(t)\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t)) +$$

$$+ \dot\varphi_1(t)\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t)) + \dot\varphi_2(t)\underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t))}_{D_{\frac{\partial f}{\partial x}}(\varphi(t))\cdot\dot\varphi(t)}$$

$$\langle\ddot\gamma(t), n\rangle =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial w}{\partial y}\end{pmatrix} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\end{pmatrix} \overset{\text{סימון}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

$$D_{\frac{\partial f}{\partial y}}(\varphi(t))\dot\varphi(t) = \dot\varphi_1(t)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x}(q) + \dot\varphi_2(t)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(q)$$

$$<\ddot{\gamma}(t), n> = <\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(q)\cdot \dot{e}_1(t)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(q)\,\dot{e}_1(t)\,\dot{e}_2(t) +$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(q)\,\dot{e}_2(t)^2 , n> = L\dot{e}_1(t)^2 + 2M\dot{e}_1(t)\,\dot{e}_2(t) + N\dot{e}_2(t)^2$$

כאשר :

$$L = <\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(q), n> \qquad M = <\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(q), n>$$

$$N = <\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(q), n>$$

$$<\overset{\in T_p(M)}{\frac{\partial f}{\partial x}}(x,y), n(x,y)> = 0 = <\frac{\partial f}{\partial y}(x,y), n(x,y)>$$

$$\Rightarrow \quad L = -<\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial n}{\partial x}(x,y)>$$

$$M = -<\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial n}{\partial y}(x,y)> = -<\frac{\partial f}{\partial y}(x,y), \frac{\partial n}{\partial x}(x,y)>$$

$$N = -<\frac{\partial f}{\partial y}(x,y), \frac{\partial n}{\partial y}(x,y)>$$

$n: U \longrightarrow S_2$ Gauss העתקת

$$n(x,y) = n_{f(x,y)}(M)$$

$$\mathcal{H}_n(t) = \frac{Lh^2 + 2Mhk + Nk^2}{Eh^2 + 2Fhk + Gk^2}$$

1/7/08

$f: U \to M$ פ.ס.ה של M
$f(q)=p$

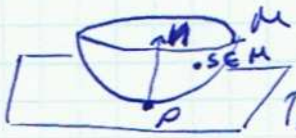
$$L = \langle \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(q), n(q) \rangle = -\langle \frac{\partial f}{\partial x}(q), \frac{\partial n}{\partial x}(q) \rangle$$

$$M = \langle \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, n \rangle = -\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial n}{\partial y} \rangle = -\langle \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial n}{\partial x} \rangle$$

$$N = \langle \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, n \rangle = -\langle \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial n}{\partial y} \rangle$$

$$Q^2_q(h,k) = Lh^2 + 2Mhk + Nk^2$$

פרוש ריבועית של Q^2_q



$T_p(M) =$ מישור משיק

בה"כ $p=(0,0,0)$ $q=(0,0)$

הערה: $d(s, T_p(M)) = \langle s-p, n \rangle$

כי $s - \langle s-p, n \rangle n$ = ההטלה הניצבת של s על $T_p(M)$.

מניחים ש-f דיפרנציאבילית פעמיים ברציפות.

נוסחת טיילור (מ-$\mathbb{R}^2$ ל-$\mathbb{R}^3$)

$$f(x,y) - f(0,0) =$$
$$= D_f(0,0)(x,y) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(q)\cdot x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(q)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(q)\cdot y^2\right)$$
$$+ o(x^2+y^2)$$

נכפול סקלרית ב-n:

$$d(f(x,y), T_p(M)) = 0 + \frac{1}{2}(\quad Lx^2 + 2Mxy + Ny^2) +$$

$(s=(x,y))$ $f''(s)$

$$+ o(x^2+y^2) = \frac{1}{2} Q^2_q(s) + o(x^2+y^2) =$$

$f(x,y) = g(x_1,y_1) = g(s_1)$

$$= \frac{1}{2} Q_{g,q_1}(s_1) + o(x_1^2+y_1^2)$$

$g(q_1) = p$

$f: U \to M$
$\varphi: [a,b] \to U$
(עבור t מסוים) $\varphi(t) = q$, $f(q) = p$

$$Q^2_q(\dot\varphi(t)) = -\left[\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial n}{\partial x} \rangle \dot\varphi_1(t)^2 + \underline{\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial n}{\partial y} \rangle \dot\varphi_1(t)\dot\varphi_2(t)}\right.$$

[illegible]

$$\left. + \underline{\langle \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial n}{\partial x} \rangle \dot\varphi_1(t)\cdot\dot\varphi_2(t)} + \langle \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial n}{\partial x} \rangle \cdot \dot\varphi_2(t)^2\right] =$$

(ב-q)

$$= -\langle D_f(q)\cdot\dot\varphi(t), D_n(q)\cdot\dot\varphi(t) \rangle$$

$\partial f \cdot \dot\varphi_1 + \partial f \dot\varphi_2$ $\quad$ $\partial n \dot\varphi_1 + \partial n \dot\varphi_2$

(**) $\mathcal{H}_n(f,t,\varphi) = \dfrac{Q_q^2(\dot\varphi(t))}{Q_q^1(\dot\varphi(t))} = -\dfrac{\langle Df(q)\dot\varphi(t), D_n(q)\cdot\dot\varphi(t)\rangle}{\langle Df(q)\dot\varphi(t), Df(q)\dot\varphi(t)\rangle}$

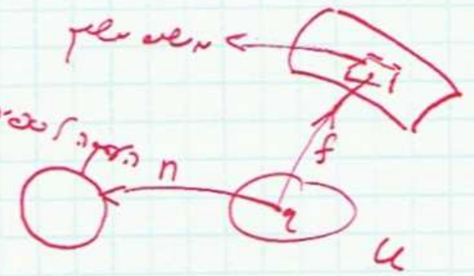
מכנה: $\|(f\circ\dot\varphi)(t)\|^2$

$\|\dot\sigma(t)\|^2$

נסמן $T_p(M) \ni V = D_f(q)\dot\varphi(t)$.

<u>הגדרה:</u> העתקת Weingarten (=אופרטור הצורה) $\alpha: T_p(M)\to R^3$

מוגדרת כ $\alpha = -D_n\circ D_f^{-1}$ בנק' q $\left(\alpha = -D_n(q)\circ D_f^{-1}(q)\right)$



$D_f: R^2 \to T_p(M)$

כעת: (**)

$$\mathcal{H}_n(f,p,v) = \frac{\langle v,\alpha v\rangle}{\langle v,v\rangle}$$

<u>טענה:</u> א) התמונה של α הוא $T_p(M)$.

ב) α הוא סימטרי. כלומר $\langle\alpha v,w\rangle = \langle v,\alpha w\rangle$ לכל $v,w\in T_p(M)$.

<u>הוכחה</u>

(א) ברור. כי תמונת α מוכלת בתמונת של $D_n(q)$, שהוא מוכל ב $n^\perp$ שזה $T_p(M)$. (כי $\|n\|=1$).

(ב) צריך למצוא בסיס $\{v,w\}$ (של וקטורים בלתי תלויים ב $T_p(M)$) כך ש $\langle\alpha v,w\rangle = \langle v,\alpha w\rangle$.

ניקח $V = \frac{\partial f}{\partial x}(q)$ $w = \frac{\partial f}{\partial y}(q)$.

$Df(q)^{-1}(v) = (1,0)$ $\left([Df(q)] = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial f}{\partial y}\right) \text{ שכן}\right)$

$\alpha v = -\frac{\partial n}{\partial x}(q)$

$\alpha w = -\frac{\partial n}{\partial x}(q)$

$\langle\alpha v,w\rangle = \langle v,\alpha w\rangle = -M$

2/7/08

(סימני כיתה ב,ד) → $\alpha = -D_n D_f^{-1}(q)$ כאשר $\kappa_n(v) = \frac{\langle v, \alpha v\rangle}{\|v\|^2}$ $\quad v \in T_p(M)$

<u>עובדה מאלגברה לינארית</u>: יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל R V ו- $T: V \to V$ העתקה לינארית סימטרית, אזי קיימים וקטורים אורתונורמליים $e_1, \dots, e_n$ ($\dim V = n$) ומספרים ממשיים $\lambda_1 \dots \lambda_n \in R$ כך ש $Te_j = \lambda_j e_j$.

(זה המשפט הספקטרלי)

<u>מסקנה 1</u>: קיימים וקטורים אורתונורמליים $e_1, e_2 \in T_p(M)$ ומספרים $\kappa_2 \le \kappa_1$ כך ש $\alpha e_j = \kappa_j e_j$ $\quad j = 1,2$. וכמובן $\alpha(he_1 + ke_2) = h\kappa_1 e_1 + k\kappa_2 e_2$.

<u>מסקנה 2</u>:

א) אם $\kappa \overset{\text{סימון}}{=} \kappa_1 = \kappa_2$ אזי $\kappa_n(v) \equiv \kappa$ לכל $v \in T_p(M) \setminus 0$. אזי p נקראת נקודה אומבילית (umbllic).

ב) אם $\kappa_1 > \kappa_2$ אזי לכל $v \in T_p(M) \setminus (Re_1 \cup Re_2)$ $\quad \kappa_2 < \kappa_n(v) < \kappa_1$

<u>הוכחה</u>

$v = he_1 + ke_2$, $hk \neq 0$ $\quad \kappa_n(v) = \frac{\kappa_1 h^2 + \kappa_2 k^2}{h^2 + k^2}$ $\quad$ אם נחליף $\kappa_1 > \kappa_2$ נגדיל את הביטוי ולכן

$\kappa_n(v) < \frac{\kappa_1 h^2 + \kappa_1 k^2}{h^2 + k^2} = \kappa_1$ $\quad$ כנ"ל אם נחליף ההיפך נקבל ולכן $\kappa_2 < \kappa_n(v) < \kappa_1$.

<u>הגדרות</u>: e_1, e_2 - כיווני העקמומיות הראשיים.

κ_1, κ_2 - עקמומיות עיקריות.

אז עקמומיות גאוס Gauss: $K = \det \alpha = \kappa_1 \cdot \kappa_2$

כי בבסיס e_1, e_2 $\quad \alpha = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}$.

ו העקמומיות הממוצעת $H = \frac{1}{2} \operatorname{trace} \alpha = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$

<u>תרגיל</u>: יהיו v, w שני וקטורים ניצבים ב $T_p(M)$. אזי $H = \frac{1}{2}(\kappa_n(v) + \kappa_n(w))$

נסמן $v(\theta) = \cos\theta \cdot e_1 + \sin\theta \cdot e_2$.

$\kappa_n(v(\theta)) = \kappa_1 \cdot \cos^2\theta + \kappa_2 \cdot \sin^2\theta$

$$H=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}k_n(v(\theta))$$ מקוים

$k_n(\omega)=k_1\sin^2\theta+k_2\cos^2\theta \qquad \omega=v(\theta\pm\frac{\pi}{2})$

ש: ∧ $0\neq k_1^2+k_2^2$

הגדרות: אם $K>0$, נקודה p נקראת אליפטית (טבורית = מקרה פרטי).

$K=0$ " " פרבולית.

$K<0$ " " היפרבולית.

הערה: K לא תלוי באוריינטציה.

H כן תלוי באוריינטציה.

דוגמאות: פ.ס. של M $e(x,y)=\alpha x^2+\beta y^2$.

$$f(x,y)=(x,y,e(x,y))$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{\partial e}{\partial x}\end{pmatrix}\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{\partial e}{\partial x}\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{\partial^2 e}{\partial x^2}\end{pmatrix}\qquad n=\begin{pmatrix}-\frac{\partial e}{\partial x}\\-\frac{\partial e}{\partial y}\\1\end{pmatrix}$$

$$L_{(x,y)}=\frac{\partial^2 e}{\partial x^2}\qquad N_{(x,y)}=\frac{\partial^2 e}{\partial y^2}\qquad M_{(x,y)}=\frac{\partial^2 e}{\partial y\partial x}$$

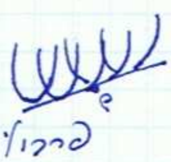
$Q_f^2(h,k)=$

$M=\{(u,v,\omega):F(p)=c,\ \nabla F(p)\neq 0\}$

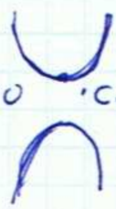
$$Q_0^2(h,k)=2(\alpha h^2+\beta k^2)$$ כאן

$T_0(M)=$ מישור uv.

$$k_1=2\alpha \qquad k_2=2\beta$$

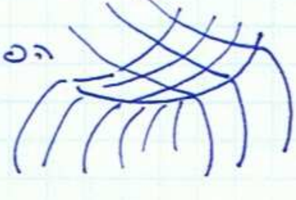


פרבולי



אליפטי $\alpha\geq\beta>0$

היפרבולי



$$\partial\ell_n(h,k) = \frac{Lh^2+2Mhk+Nk^2}{Eh^2+2Fhk+Gk^2}$$

מוגדרת חיובית

(א) $\iff$ Q^2 מוגדרת (כלומר $Q>0$ או $Q<0$ פרט ל-$(0,0)$)

(ב) $\iff$ Q^2 מוגדרת למחצה $Q\ge 0$ או $Q\le 0$ + יש $(h,k)\neq 0$ כך ש $Q(h,k)=0$

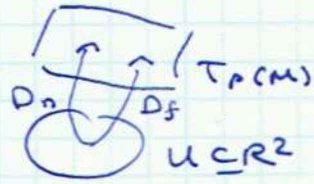
(ג) $\iff$ Q^2 לא מוגדרת יש כך ש $Q(h,k)>0$ ויש כך ש $Q(h,k)<0$.

$LN-M^2$ $>$(א) $=$(ב) $<$(ג) 0

$$\alpha = -D_n D_f^{-1}$$

$$\alpha\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -\frac{\partial n}{\partial x}$$

$$\alpha\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -\frac{\partial n}{\partial y}$$



<u>בעיה באלגברה:</u> $\dim V=n$ $x_1,\dots,x_n\in V$ בסיס, $y_1,\dots,y_n\in V$ כלשהן. $Tx_j=y_j$ לינארית.

נתונים $\langle x_i,x_j\rangle_{1\le i,j\le n}$, $\langle y_i,x_j\rangle_{1\le i,j\le n}$ (כולן מכפלות)

למצוא $\det T$, $\operatorname{tr} T$.

יהי $e_1\dots e_n$ מערכת אורתונורמלית ב-V. נגדיר $T_1 e_j=x_j$ ו $T_2 e_j=y_j$. ברור כי $T=T_2T_1^{-1}$.

בבסיס $e_1,\dots,e_n$ A היא המטריצה של $T_1^*T_1$.

B היא המטריצה של $T_2^*T_1$. מתקיים

$$T_1^{-1}T_2 = A^{-1}B^* \quad (=T_1^{-1}(T_1^*)^{-1}T_1^*T_2)$$

$$\det T = \frac{\det B}{\det A}$$ לכן

$$\operatorname{tr} T = \operatorname{tr}(A^{-1}B^*)$$

במקרה שלנו $n=2$ $x_1=\frac{\partial f}{\partial x}$ $y_1=\frac{\partial n}{\partial x}$

$\in R^3$

$x_2=\frac{\partial f}{\partial y}$ $y_2=\frac{\partial n}{\partial y}$

$$B = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad K = \frac{\det B}{\det A} = \frac{LN - M^2}{EG - F_2}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} B^{*} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} GL - FM & * \\ * & -FM + EN \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad H = \frac{1}{2} tr \, (A^{-1} B^{*}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{GL - 2FM + EN}{EG - F^2}$$

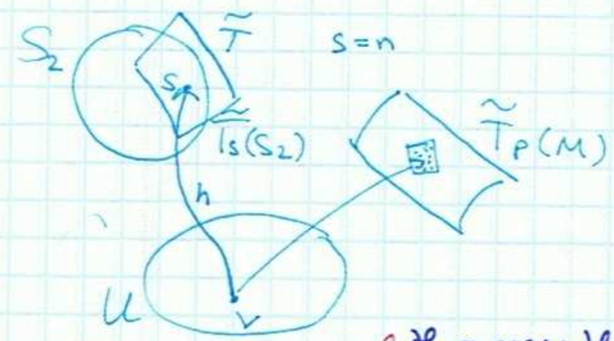
8/7/08

הערה: מ- K, H קל להשיג את הקמוריים הראשיים κ_1,κ_2 מנוסחאות Viete.

κ_j הן פתרונות של המשוואה $\kappa^2-2H\kappa+K=0$

כ"א $\kappa_1=H+\sqrt{H^2-K}$ $\qquad \kappa_2=H-\sqrt{H^2-K}$

הערה: α איננה תלויה בכפיסה $\alpha\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial n}{\partial x}$, $\alpha\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial n}{\partial y}$



$T_s(S_2)=T_p(M)$

כי $\alpha: T_p(M)\to T_p(M)$ "$T_s(S_2)$"

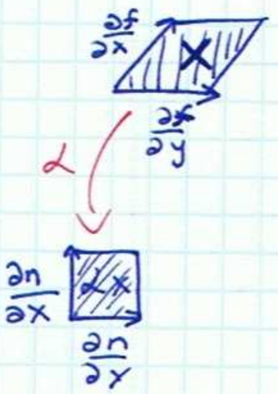
$\kappa_1>\kappa_2$ $\qquad$ בנק' ב f. $\begin{cases}\kappa_1=\max\limits_{\|v\|=1}\kappa_n(v)=\kappa_n(e_1)\\ \kappa_2=\min\limits_{\|v\|=1}\kappa_n(v)=\kappa_n(e_2)\end{cases}$

זה קורה כיוונים ראשיים, כ"א

עכשיו $\alpha|_{\mathbb{R}e_1}v=\lambda v$ $\qquad \alpha e_1=\kappa_1 e_1 \quad \alpha e_2=\kappa_2 e_2$

α לינארית!

אינטרפרטציה של K. נזכיר את המקבילון



$$X=[0,1]\frac{\partial f}{\partial x}(q)+[0,1]\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(q)$$

ברור ש $\alpha X=[0,1]\frac{\partial n}{\partial x}(q)+[0,1]\frac{\partial n}{\partial y}(q)$

וידוע ש $\frac{\text{area}\,\alpha X}{\text{area}\,X}=|\det\alpha|=|K|$

גם לכל ε קטן. $\frac{\text{area}(\varepsilon\alpha X)}{\text{area}(\varepsilon X)}=|K|$

הערה: יהי $V\subseteq\mathbb{R}^3$ מרחב דו-מימדי אז לכל $u,v\in V$

$$Tu\times Tv=(\det T)\cdot u\times v$$

הוכחה:

יהיו a,b,γ,δ כך ש $\begin{aligned}Tu&=\alpha u+\beta v\\ Tv&=\gamma u+\delta v\end{aligned}$

$Tu\times Tv=\alpha\delta\cdot u\times v+\beta\gamma\cdot v\times u=(\alpha\delta-\beta\gamma)(u\times v)=\det T(u\times v)$

במקרה שלנו $u=\frac{\partial f}{\partial x}(q)$ $v=\frac{\partial f}{\partial y}(q)$ $T=\alpha$ $V=T_p(M)$

ומקבלים

$$\frac{\partial n}{\partial x}(q)\times\frac{\partial n}{\partial y}(q)=K\,\frac{\partial f}{\partial x}(q)\times\frac{\partial f}{\partial y}(q)$$

<u>הערה:</u> $\|u\times v\|=area([0,1]u+[0,1]v)$

פנימי = intrinsic.

<u>מושג:</u> יהי M משטח רגולרי קשיר מסילתית (=ז"א לכל $p,s\in M$

קיימת מסילה $\gamma:[a,b]\to M$ על M כך ש $p,s\in\gamma([a,b])$.

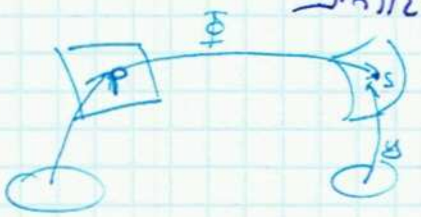
מגדירים מרחק בין p ל-s: $\rho(p,s)=\inf_{\gamma} l(\gamma)$

זה המרחק הפנימי ב M.

<u>הערה:</u> ברור ש ρ הוא מטריקה. ($\rho(p,s)\geq\|p-s\|$)

<u>הגדרה:</u> M, N משטחים רגולריים, העתקה $\Phi:M\to N$ נקראת

דיפאומורפיזם אם לכל $p\in M$ קיימות פרמטריזציות רגולריות



$f:U\to M$ ו- $g:V\to N$ כך ש

$p\in f(U)$ וגם שההעתקה $g^{-1}\circ\Phi\circ f:U\to V$ ($U,V\subseteq\mathbb{R}^2$)

הינה דיפאומורפיזם.

(הכל כאן רגולרי - אנו מדברים על דברים רגולריים)

$g(V)\supseteq\Phi\circ f(U)$

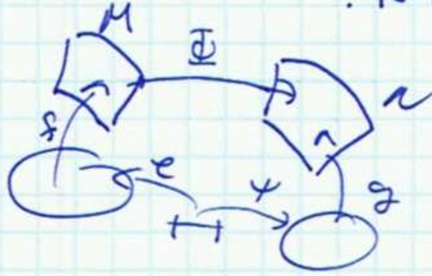
9/7/08

M, N משטחים רגולריים $\Phi: M \to N$ דיפרנ' אם קיימות פרמטריזציות $f: U \to M$, $p \in f(U)$, $g: V \to N$ ש φ ש $g^{-1}\circ\Phi\circ f: U \to V$ דיפרנ' כרגיל.

<u>הערה 1</u>: אם Φ חח"ע ועל ודיפרנציאבילי, אזי Φ^{-1} גם כן, כי לוקחים $(g^{-1}\circ\Phi\circ f)^{-1} = f^{-1}\Phi^{-1}g$.

<u>הערה 2</u>: אם γ מסילה דיפרנציאבילית של M (כלומר ש $\gamma = f\circ\varphi$ כאשר $\varphi: [a,b] \to U$ מסילה דיפרנציאבילית) ו Φ דיפרנציאבילית,

אזי $\Phi\circ\gamma$ מסילה דיפרנציאבילית של N.



כי $\Phi\circ\gamma = g\underbrace{g^{-1}\Phi\gamma}_{\psi}$

<u>הגדרה</u>: M, N כנ"ל

העתקה $\Phi: M \xrightarrow[\text{חח"ע}]{\text{על}} N$ נקראת איזומטריה

אם Φ דיפרנציאבילית ולכל מסילה γ של M, $l(\Phi\circ\gamma) = l(\gamma)$

ברור שאיזומטריה במובן הזה $\Rightarrow$ איזומטריה במרחקים הפנימיים.

<u>טענה</u>: Φ איזומטריה אמ"מ לכל γ כנ"ל, $\|(\Phi\gamma)^{\cdot}(t)\| = \|\dot\gamma(t)\|$

<u>הוכחה</u>

$\Leftarrow$ ברור (כי $l(\gamma) = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|dt$)

$\Rightarrow$ בה"כ $t=0$. נסמן $\gamma_\varepsilon = \gamma|_{[-\varepsilon,\varepsilon]}$. מקיים

$$2\|(\Phi\circ\gamma)^{\cdot}(0)\| \xleftarrow[\varepsilon\to 0]{} \frac{l(\Phi\gamma_\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{l(\gamma_\varepsilon)}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 2\|\dot\gamma(0)\|$$

<u>הגדרה</u>: M, N משטחים רגולריים. אומרים ש M ב $\overset{M}{p}$ איזומטרית מקומית ל N ב $\overset{N}{s}$ אם קיימות סביבות $p \in C \subseteq M$, $s \in D \subseteq N$ ואיזומטריה $\Phi: C \xrightarrow{\text{על}} D$, עם $s = \Phi(p)$.

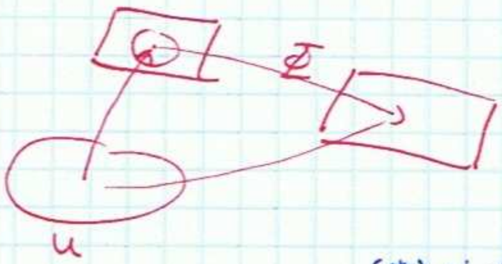
<u>משפט</u>: זה קורה אמ"מ קיימת קב' פתוחה $U \subseteq R^2$ ופרמטריזציות רגולריות $f: U \to M$, $g: U \to N$, $q \in U$ $f(q) = p$ $g(q) = s$ כך שלכל $r \in U$ מתקיים $E_g(r) = E_f(r)$, $F_g(r) = F_f(r)$, $G_g(r) = G_f(r)$.

$(= \|\frac{\partial f}{\partial x}(r)\|^2)$

⊛

הוכחה

⇐ נניח, $f:U\to M$ פיסה כך ש $f(q)=p$, $q\in U$ ו $f(U)\subseteq C$.



נגדיר $g=\Phi\circ f$.

($EG-F^2>0$ ⇐ גורר רגולריות)

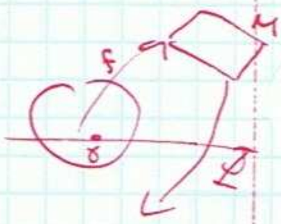
g דיפרנציאבילית, הרגולריות — נובעת מ (*).

$r\in U$ נגדיר $e(t)=r+(t,0)$. קיים $\varepsilon>0$ כך ש $e([-\varepsilon,\varepsilon])\subseteq U$

$\gamma=f\circ e$, $e:[-\varepsilon,\varepsilon]$. $\dot\gamma(0)=\frac{\partial f}{\partial x}(r)$. יודעים

$$\Phi\circ\gamma=\Phi\circ f\circ e=g\circ e$$

$$(\Phi\circ\gamma)^{\cdot}(0)=\frac{\partial g}{\partial x}(r)$$



Φ איזומטריה ⇐ $\underbrace{\|\frac{\partial f}{\partial x}(r)\|^2}_{E_f(r)}=\underbrace{\|\frac{\partial g}{\partial x}(r)\|^2}_{E_g(r)}$

באותו אופן, $G_f(r)=G_g(r)$. ניקח $e(t)=r+(t,t)$

קיים $\varepsilon>0$ .....

$\gamma=f\circ e$ $\dot\gamma(0)=\frac{\partial f}{\partial x}(r)+\frac{\partial f}{\partial y}(r)$. כמו קודם, מקבלים

$$\|\frac{\partial f}{\partial x}(r)+\frac{\partial f}{\partial y}(r)\|^2=\|\frac{\partial g}{\partial x}(r)+\frac{\partial g}{\partial y}(r)\|^2$$

$$E_f(r)+2F_f(r)+G_f(r)=E_g(r)+2F_g(r)+G_g(r)$$

ונקבל ש $F_f=F_g$ ב r.

⇐ נניח. $C=f(U)$, $D=g(U)$, $\Phi=g\circ f^{-1}$.

צ"ל $\gamma:[a,b]\to M$, $\|(\Phi\circ\gamma)^{\cdot}(t)\|=\|\dot\gamma(t)\|$.

$\gamma=f\circ e$
$\Phi\gamma=g\circ e$

$$\left[Q^1_{e(t)}(\dot e(t))\right]^{1/2}=\left[Q^2_{e(t)}(\dot e(t))\right]^{1/2}$$

מסקנה

אומרים שגודל מסוים (מושג) הינו פנימי אם אפשר להגדירו בעזרת E,F,G ו־ e בלבד. $f:U\to M$, $e:[a,b]\to U$

סימני Christoffel

$\frac{\partial f}{\partial x}(q), \frac{\partial f}{\partial y}(q), n(q)$ בסיס של R^3.

הם ב- $q\in U$:

סקלר ↓   וקטור ↓

$$\mathrm{I}\quad R^3\ni\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\Gamma_{11}^1\frac{\partial f}{\partial x}+\Gamma_{11}^2\frac{\partial f}{\partial y}+L\cdot n$$

$$\mathrm{II}\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\Gamma_{21}^1\frac{\partial f}{\partial x}+\Gamma_{21}^2\frac{\partial f}{\partial y}+Mn$$

$$\mathrm{II}\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\Gamma_{12}^1\frac{\partial f}{\partial x}+\Gamma_{12}^2\frac{\partial f}{\partial y}+Mn$$

$$\mathrm{III}\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\Gamma_{22}^1\frac{\partial f}{\partial x}+\Gamma_{22}^1\frac{\partial f}{\partial y}+N\cdot n$$

שוויון - וקטורי.

(הסימון של Christoffel
Γ_{kl}^i כסקלר
ה: i - ה המקדם של
$\frac{\partial f}{\partial x_i}$.
אך בגזירה לפי x_kx_l.)

מטרה: להראות שאלו גדלים פנימיים.

"נחשב":

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\langle\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial x}\right\rangle=2\left\langle\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\frac{\partial f}{\partial x}\right\rangle$$

$$\frac{\partial E}{\partial x}$$

$$\frac{\partial E}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left\langle\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial x}\right\rangle=2\left\langle\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},\frac{\partial f}{\partial x}\right\rangle$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left\langle\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right\rangle=\left\langle\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\frac{\partial f}{\partial y}\right\rangle+\left\langle\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\frac{\partial f}{\partial x}\right\rangle$$

שוויון - מקדמים:

$$\mathrm{I}:\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial E}{\partial x}=E\cdot\Gamma_{11}^1+F\,\Gamma_{11}^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial y}=F\Gamma_{11}^1+G\,\Gamma_{11}^2$$

$$\mathrm{III}:\quad E\,\Gamma_{22}^1+F\Gamma_{22}^1=\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial x}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial y}=F\Gamma_{22}^1+G\Gamma_{22}^2$$

מסקנה: סמלי Christoffel הם גדלים פנימיים.

נזכיר:

$$k_g(\dot\gamma,t)=\frac{1}{\|\dot\gamma(t)\|^3}\langle\dot\gamma,\ddot\gamma,n\rangle$$

$\gamma=f\circ e$ $\|\dot\gamma(t)\|=(Q\dot e(t)\cdot\dot e(t))^{1/2}$

$\dot e(t)=(\dot e_1(t),\dot e_2(t))$

נסמן: $(\dot{e}(t) = (h,k))$ $\frac{\partial f}{\partial x} = X \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = Y$

$$\dot{\gamma}(t) = \underbrace{\dot{e}_1(t)\frac{\partial f}{\partial x}(e(t)) + \dot{e}_2(t)\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(e(t))}_{= hX + kY}$$

$$\ddot{\gamma}(t) = \ddot{e}_1(t)X + \ddot{e}_2(t)Y + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2 =$$

$$= [\ddot{e}_1(t) + \Gamma_{11}^1 h^2 + 2\Gamma_{12}^1 hk + \Gamma_{22}^1 k^2]X + [\ddot{e}_2(t) + \Gamma_{11}^2 h^2 + \Gamma_{12}^2 hk + \Gamma_{22}^2 k^2]Y + xn + yn =$$

$$= \alpha X + \beta Y + xn + yn$$

נ"ל נ"ל

$$\langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, n \rangle = \langle hX + kY, \alpha X + \beta Y, n \rangle = \langle (h\beta - k\alpha) X \times Y, n \rangle =$$

$$= (h\beta - k\alpha)\underbrace{\|X \times Y\|}_{= EG - F^2}$$