# מבוא לטופולוגיה

יובל קפלן

סיכום הרצאות ד״ר דן רומיק בקורס ״מבוא לטופולוגיה״ (80516)
באוניברסיטה העברית, 8–2007.

תוכן מחברת זו הוקלד ונערך על־ידי יובל קפלן. אין המרצה אחראי לכל טעות שנפלה בו. סודר באמצעות $\LaTeX\,2_\varepsilon$ ב־22 באוגוסט 2008.

עדכונים ותיקונים יופיעו ב־/http://www.limsoup.net. לתגובות, לתיקונים ובכל עניין אחר, אנא כתבו ל־yuvak@gmx.net.

סיכומים נוספים בסדרה:

| | | |
|---|---|---|
| 2006–7 | חשבון אינפיניטסימלי 1 | אלגברה לינארית 1 |
| | חשבון אינפיניטסימלי 2 | אלגברה לינארית 2 |
| | תורת הקבוצות | |
| 2007–8 | מבנים אלגבריים 1 | תורת ההסתברות 1 |
| | חשבון אינפי׳ מתקדם 1 | |
| בקרוב | חשבון אינפי׳ מתקדם 2 | מבוא לטופולוגיה |
| | תורת המספרים וקריפטו׳ | מבנים אלגבריים 2 |
| | תולדות המתמטיקה | |

# תוכן עניינים

# 1 מרחבים מטריים

12.5.2008 **הגדרה.** **מרחב מטרי** הוא זוג $(X, d)$ כאשר $X$ הוא קבוצה ו־$d$ הוא פונקציית מרחק **(מטריקה)** מרחב מטרי
$d : X \times X \to [0, \infty)$ המקיימת לכל $x, y, z \in X$ את התכונות –

1. $d(x, y) = 0$ אם"ם $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$ **(סימטרייה)**;
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ **(אי־שוויון המשולש)**.

**דוגמה.** $X = \mathbb{R}$ עם המטריקה $d(x, y) = |x - y|$.

**דוגמה.** $\mathbb{R}^n$ עם המטריקה $d_2(x, y) = \|x - y\| = (\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2)^{\frac{1}{2}}$;
$\mathbb{R}^n$ עם המטריקה $d_1(x, y) = \|x - y\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$;
$\mathbb{R}^n$ עם המטריקה $d_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$.

**דוגמה.** $\mathbb{N}$ עם המטריקה $d(x, y) = |x - y|$. באופן יותר כללי, אם $(X, d)$ מרחב מטרי ו־$A \subseteq X$, אז $(A, d\mid_{A \times A})$ גם מרחב מטרי.

**דוגמה.** $\mathbb{N}$ עם $d(x, y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$. מרחב זה זהה למטריקה $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ עם המטריקה $d(x, y) = |x - y|$.

**דוגמה.** $\mathbb{Z}$ עם המטריקה $d_p(x, y) = \frac{1}{p^{V_p(x-y)}}$ – המטריקה ה־$p$־אדית ($p$ מספר ראשוני), כאשר $V_p(n) = \max\{k \geq 0 \mid p^k \mid n\}$ ההערכה ה־$p$־אדית על $n$, ומגדירים $V_p(0) = \infty$. במטריקה זו, אם $x - y$ מתחלק בחזקה גבוהה של $p$, $x$ מאוד קרוב ל־$y$.

**דוגמה.** אם $(X_1, d_1)$ ו־$(X_2, d_2)$ מרחבים מטריים, אפשר להגדיר מטריקה על $X_1 \times X_2$ על־ידי $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2)$. נבדוק קיום אי־שוויון המשולש:

$$\begin{aligned} d((x_1, x_2), (z_1, z_2)) &\stackrel{\text{def}}{=} d(x_1, z_1) + d(x_2, z_2) \\ &\leq (d(x_1, y_1) + d(y_1, z_1)) + (d(x_2, y_2) + d(y_2, z_2)) \\ &= d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) + d((y_1, y_2), (z_1, z_2)) \end{aligned}$$

**דוגמה.** באופן יותר כללי, אם $\{(X_i, d_i)\}_{i=1}^\infty$, אפשר להגדיר מטריקה על $\prod_{i=1}^\infty X_i$. ננסה: $d((x_i)_{i=1}^\infty, (y_i)_{i=1}^\infty) = \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{2^i} d_i(x_i, y_i)$ – לא עובד, אבל אפשר להגדיר מטריקה חדשה $d_i'(x_i, y_i) = \min(d(x_i, y_i), 1)$ ואז ההגדרה תעבוד.

אם $\{(X_i, d_i)\}_{i \in I}$ כאשר $|I| > \aleph_0$, לא ניתן להגדיר מטריקה "טבעית" או "מעניינת" על $\prod_{i \in I} X_i$.

**דוגמה.** על כל קבוצה $X$ ניתן להגדיר את המטריקה הדיסקרטית

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

## 1.1 קבוצות פתוחות וסגורות

### 1.1.1 קבוצות פתוחות וסגורות

כדור

**הגדרה.** **כדור** הוא קבוצה מהצורה $B(x,r)=\{y\in X \mid d(x,y)\le r\}$ ("כדור סגור סביב $x$ ברדיוס $r$") או $B(x,r)^\circ = B(x,r^-)=\{y\in X \mid d(x,y)<r\}$ ("כדור פתוח").

קבוצה פתוחה

קבוצה סגורה

**הגדרה.** קבוצה $A\subseteq X$ נקראת **פתוחה** אם לכל $x\in A$, $A$ מכילה כדור $B(x,r)$ עבור $r>0$ כלשהו. $A\subseteq X$ נקראת **סגורה** אם $A^C=X\setminus A$ פתוחה.

**טענה 1:** (1) $A$ פתוחה אס"ם $A$ איחוד של כדורים פתוחים;[1] (2) איחוד כלשהו של קבוצות פתוחות הוא פתוח; (3) חיתוך של קבוצות סגורות הוא סגור; (4) חיתוך שתי פתוחות פתוח; (5) איחוד שתי סגורות סגור.

**הוכחה.** (2) נובע בקלות מ־(1); (3) נובע מ־(2) על־ידי כללי דה־מורגן. (4) ו־(5) שקולים על־ידי מעבר למשלים. נוכיח את (1).

אם $A$ פתוחה, אז לכל $x\in A$ קיים כדור $B(x,r_x^-)\subseteq A$. אז $A=\bigcup_{x\in A}B(x,r_x^-)$. לכן $A$ היא איחוד כדורים פתוחים.

בכיוון השני, אם $A$ היא איחוד של כדורים פתוחים ו־$x\in A$, אז $x$ איבר של אחד הכדורים הפתוחים באיחוד, נניח $B(y,r^-)$. אבל $B(x,(r-d(x,y))^-)\subseteq B(y,r^-)$.

פתיחות יחסית

**טענה 2:** אם $A\subseteq X$ אז ב־$(A,d\mid_{A\times A})$, $U$ פתוחה (יחסית ב־$A$) אס"ם $U=V\cap A$ עבור $V\subseteq X$ פתוחה כלשהי.

### 1.1.2 גבולות ורציפות

סדרה מתכנסת

**הגדרה.** סדרה $(x_n)_{n=1}^\infty$ של נקודות במרחב מטרי $(X,d)$ נקראת **מתכנסת** אם קיים $x\in X$ כך ש־$\lim_{n\to\infty}d(x_n,x)=0$, או במילים אחרות, אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $N$ כך שלכל $n>N$ מתקיים $d(x_n,x)<\varepsilon$. (מסמנים $\lim_{n\to\infty}x_n=x$ או $x_n\overset{n\to\infty}{\to}x$.)

**הגדרה.** אם $(X,d)$ ו־$(Y,d)$ מרחבים מטריים[2] ו־$f:X\to Y$ פונקציה, אומרים ש־$f$ **רציפה ב־**$x\in X$ אם לכל סדרה $(x_n)_{n=1}^\infty$ ב־$X$, אם $x_n\overset{n\to\infty}{\to}x$ אז $f(x_n)\overset{n\to\infty}{\to}f(x)$. אומרים ש־$f$ **רציפה** אם היא רציפה בכל $x$.

**טענה 3:** $f$ רציפה ב־$x$ אס"ם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $d(x',x)<\delta$ אזי מתקיים $d(f(x'),f(x))<\varepsilon$.

ניתן לאפיין פונקציות רציפות על־ידי קבוצות פתוחות:

**טענה 4:** $f:X\to Y$ רציפה אס"ם לכל קבוצה פתוחה $U\subseteq Y$, $f^{-1}(U)$ פתוחה ב־$X$.

[1] בפרט, כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה.

[2] לא בהכרח מדובר באותה מטריקה $d$.

14.5.2008 **הוכחה.** נניח ש־$f$ רציפה. אם $U \subseteq Y$ פתוחה, נראה ש־$f^{-1}(U)$ פתוחה. אם $x \in f^{-1}(U)$, $f(x) \in U$ ולכן עבור $\varepsilon > 0$ כלשהו, $B(f(x), \varepsilon) \subseteq U$. ניקח $\delta$ שמתאים ל־$\varepsilon$ על־פי הגדרת הרציפות, כלומר, לכל $y$, אם $d(x,y) < \delta$ אז $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. נקבל
$$f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon) \subseteq U$$
לכן $B(x,\delta) \subseteq f^{-1}(U)$.

בכיוון השני, נניח שלכל קבוצה $U \subseteq Y$ פתוחה, $f^{-1}(U)$ פתוחה. יהי $x \in X$ ו־$\varepsilon > 0$. ניקח $U = B(f(x), \varepsilon^-)$. אז $f^{-1}(U)$ פתוחה ובפרט מכילה כדור $B(x,\delta)$. לכן אם $y \in B(x,\delta)$, כלומר $d(x,y) \le \delta$, אז $f(y) \in U = B(f(x), \varepsilon^-)$, כלומר $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

## 1.2 מרחבים שלמים

### 1.2.1 מרחבים שלמים והשלמת מרחבים

**הגדרה.** סדרה $(x_n)_{n=1}^\infty$ במרחב מטרי $(X,d)$ נקראת **סדרת קושי** אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N$ כך שלכל $n,m > N$ מתקיים $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. סדרת קושי

**הגדרה.** מרחב מטרי נקרא **שלם** אם כל סדרת קושי בו מתכנסת. שלמות

**דוגמה.** $\mathbb{R}$ שלם; $\mathbb{Q}$ אינו שלם. $[0,1]$ שלם; $(0,1)$ אינו שלם.

**הגדרה.** $A \subseteq B$ **צפופה** ב־$B$ אם לכל $\varepsilon > 0$ ולכל $x \in B$ קיימת $y \in A$ כך ש־$d(x,y) < \varepsilon$. צפיפות

**משפט 5 (ההשלמה):** אם $(X,d)$ מרחב מטרי, אז ניתן לשכן את $(X,d)$ במרחב גדול יותר $(\bar{X}, \bar{d})$ (כלומר $\bar{X} \supseteq X$, $d = \bar{d}\mid_{X\times X}$) כך ש־$(\bar{X}, \bar{d})$ שלם ו־$X$ צפוף ב־$\bar{X}$. יתר על כן, ההשלמה $(\bar{X}, \bar{d})$ יחידה – אם גם $(\bar{\bar{X}}, \bar{\bar{d}})$ מקיימת את תנאי ההשלמה, קיימת העתקה חד־חד ערכית ועל $g : \bar{X} \to \bar{\bar{X}}$ כך ש־$g\mid_X = id\mid_X$ ולכל $x,y \in \bar{X}$, $\bar{d}(x,y) = \bar{\bar{d}}(g(x), g(y))$.

**הוכחה.** נשים לב שאם $(x_n)_{n=1}^\infty$ ו־$(y_n)_{n=1}^n$ סדרות קושי ב־$X$ אז קיים $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$: זו סדרת קושי ב־$\mathbb{R}$, כי עבור $m,n > N$,
$$d(x_n,y_n) \le d(x_n,x_m) + d(x_m,y_m) + d(y_m,y_n) < \frac{\varepsilon}{2} + d(x_m,y_m) + \frac{\varepsilon}{2}$$
ובאופן סימטרי גם $d(x_m,y_m) < d(x_n,y_n) + \varepsilon$, לכן $|d(x_n,y_n) - d(x_m,y_m)| < \varepsilon$.

נתבונן בקבוצת הסדרות ב־$X$, $Y = \prod_{n=1}^\infty X = X^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_{n=1}^\infty \mid x_i \in X\}$, ונגדיר $Z = \{(x_n)_{n=1}^\infty \in Y \mid (x_n)_{n=1}^\infty \text{ is Cauchy}\}$. ננסה להגדיר מטריקה על $Z$ על־ידי $d_*((x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty) = \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)$. סימטרייה מתקיימת (לפי סימטריות $d$). גם אי־שוויון המשולש מתקיים:
$$\begin{aligned} d_*((x_n),(z_n)) &= \lim_{n\to\infty} d(x_n,z_n) \\ &\le \lim_{n\to\infty}(d(x_n,y_n) + d(y_n,z_n)) \\ &= d_*((x_n),(y_n)) + d_*((y_n),(z_n)) \end{aligned}$$

וברור ש־$d_*((x_n),(x_n)) = 0$. עם זאת, לא מתקיים $d_*((x_n),(y_n)) \neq 0$ עבור $(x_n) \neq (y_n)$.[3]
נגדיר יחס שקילות על $Z$: $(x_n)\ (y_n)$ אם״ם $d_*((x_n),(y_n)) = 0$ (הוכחה שזה יחס שקילות – כתרגיל). נסמן $\bar{X} = Z/$. נגדיר $\bar{d}([(x_n)],[(y_n)]) = d_*((x_n),(y_n))$. $\bar{d}$ מוגדרת היטב כי 19.5.2008
$d(x_n', y_n') \leq d(x_n, y_n) + d(x_n, x_n') + d(y_n, y_n')$ אם $(x_n)\ (x_n')$, $(y_n)\ (y_n')$.

$\bar{d}$ מטריקה: היא יורשת מ־$d$ את תכונותיה כסמי־מטריקה, וכן אם $[(x_n)] \neq [(y_n)]$ אז $d_*((x_n),(y_n)) = \bar{d}([(x_n)],[(y_n)]) \neq 0$.

$(X,d)$ אמנם איננו מוכל ב־$(\bar{X},\bar{d})$, אך אם נזהה את $x \in X$ עם $[(x)_n] \in \bar{X}$, זה בסדר.

$X$ צפוף ב־$\bar{X}$: אם $[(x_n)_{n=1}^{\infty}] \in \bar{X}$ ו־$\varepsilon > 0$, אז $(x_n)$ קושי ולכן קיים $N$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $d(x_n, x_N) < \varepsilon$. נסמן $y = [(x_N)_n]$. אז

$$\bar{d}(y,[(x_n)]) = d_*((x_N)_n,(x_n)_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_N, x_n) \leq \varepsilon$$

$\bar{X}$ שלם: נניח ש־$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי ב־$\bar{X}$. כל $a_n$ הוא מהצורה $a_n = [(x_k^n)_{k=1}^{\infty}]$, $x_k^n \in X$. נראה ש־$(a_n)$ מתכנסת לגבול $y \in \bar{X}$: תהי $(\varepsilon_k)$ סדרה ששואפת ל־0 (למשל $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$). לכל $k$, $(x_m^k)_{m=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי, לכן קיים $N_k$ כך שלכל $m > N_k$, $\frac{\varepsilon_k}{2} > d(x_m^k, x_{N_k}^k)$. נסמן $y = [(x_{N_k}^k)_k]$. $(x_{N_k}^k)$ היא סדרת קושי, כי אם $\varepsilon > 0$ כלשהו אז בגלל ש־$(a_n)$ סדרת קושי, קיים $N$ כך שלכל $k, k' > N$, $\bar{d}(a_k, a_{k'}) < \frac{\varepsilon}{2}$, אבל $\bar{d}(a_k, a_k') = \lim_{m\to\infty} d(x_m^k, x_m^{k'})$ ול־$m > N_k$,

$$\begin{aligned} d(x_m^k, x_m^{k'}) &\geq d(x_{N_k}^k, x_{N_{k'}}^k) - d(x_{N_k}^k, x_m^k) - d(x_{N_{k'}}^{k'}, x_m^{k'}) \\ &> d(x_{N_k}^k, x_{N_{k'}}^k) - 2\varepsilon_k \end{aligned}$$

לבסוף, נראה כי $y \overset{n\to\infty}{\to} a_n$. נקבע $n$; אז $\bar{d}(x_n, y) \leq \bar{d}(a_n, x_{N_n}^n) + \bar{d}(x_{N_n}^n, y)$, אבל $\bar{}(a_n, x_{N_n}^n) = \lim_{m\to\infty} d(x_m^n, x_{N_n}^n) \leq \varepsilon_n$ ו־$\frac{\varepsilon}{2} \geq \bar{d}(x_{N_n}^n, y) = \lim_{m\to\infty} d(x_{N_n}^n, x_{N_m}^m)$, אם $n$ מספיק גדול.

להוכחת היחידות, נניח ש־$(\bar{X},\bar{d})$ ו־$(\bar{\bar{X}},\bar{\bar{d}})$ שתי השלמות של $(X,d)$. אם $\bar{x} \in \bar{X}$, קיימת 21.5.2008
סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ של נקודות ב־$X$ כך ש־$x_n \overset{\bar{d}}{\to} \bar{x}$. לכן בפרט $(x_n)$ היא סדרת קושי.[4] לכן קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} x_n = f(\bar{x}) \in \bar{\bar{X}}$ (לפי $\bar{\bar{d}}$). כתרגיל: לבדוק ש־$f\ |_X = id\ |_X$ (ברור) וש־$f$ מעבירה את $\bar{d}$ ל־$\bar{\bar{d}}$ (ברור, לפי סדרות).

### 1.2.2 הוכחה אלטרנטיבית למשפט ההשלמה למרחבים מטריים

ניתן להשתמש בלמה של צורן להוכחת משפט ההשלמה (לגבי הלמה של צורן, ר׳ להלן, 2.11.1). 9.7.2008

**משפט (ההשלמה):** אם $X$ מרחב מטרי, ניתן לשכן אותו במרחב מטרי שלם $X_c$ כך ש־$\overline{X} = X_c$.

**הוכחה (קיום).** הרעיון: להוסיף נקודה אחת בכל פעם.

יהי $(X,d)$ המרחב ותהי $A$ קבוצה המכילה את $X$ בעלת עצמה $|A| > |X^{\mathbb{N}}|$. נגדיר קבוצה סדורה חלקית $(P,\leq)$: איברי $P$ הם מרחבים מטריים $(Y,\bar{d})$ כאשר $X \subseteq Y \subseteq A$, $\bar{d}_{X\times X} \equiv d$

[3] פונקציה כמו $d_*$ נקראת **סמי־מטריקה**.
[4] במטריקה $\bar{d}$, אבל $\bar{d}$ מזדהה עם $\bar{\bar{d}}$ על $X$.

ו־$X$ צפופה ב־$Y$. איברי $P$ ייקראו "הרחבות של $X$". נאמר ש־$(Y_2, \overline{d}_2) \leq (Y_1, \overline{d}_1)$ אם $Y_1 \subseteq Y_2$ וגם $\overline{d}_2 \mid_{Y_1 \times Y_1} \equiv \overline{d}_1$.

עם הגדרות אלו, $(P, \leq)$ היא קבוצה סדורה חלקית המקיימת את הנחות הלמה של צורן: בהינתן שרשרת של הרחבות של $X$ $\{(Y_\alpha, \overline{d}_\alpha)\}_{\alpha \in I}$, היא חסומה מלמעלה על־ידי $(\bigcup_{\alpha \in I} Y_\alpha, \overline{d})$ (תרגיל: לחשוב איך להגדיר את $\overline{d}$ ולמה זו הרחבה).

מהלמה של צורן נסיק שקיים איבר מקסימלי $(X_c, \overline{d})$. נותר להראות ש־$X_c$ שלם. אם $X_c$ לא שלם, יש לו סדרת קושי שאינה מתכנסת, אבל אז אפשר להגדיר הרחבה עוד יותר גדולה: ניקח נקודה $a \in A \setminus X_c$ (משתמשים בהנחה על $|A|$) ונגדיר הרחבה $X_c^+ = X_c \cup \{a\}$ עם מטריקה $\overline{d}_+ = \overline{d}(x, y)$ ל־$x, y \in X_c$, $\overline{d}_+(x, a) = \lim_{n \to \infty} \overline{d}(x, a_n)$ כאשר $(a_n)_{n=1}^\infty$ סדרת קושי שלא מתכנסת ב־$X_c$. (צריך לבדוק גם ש־$X$ אכן צפוף ב־$X_c^+$.) זו סתירה למקסימליות.

## 1.3 קומפקטיות

19.5.2008 **הגדרה.** מרחב מטרי $(X, d)$ נקרא **קומפקטי** אם לכל כיסוי של $X$ על־ידי קבוצות פתוחות $X = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$ ($V_\alpha \subseteq X$) קיים תת־כיסוי סופי $X = \bigcup_{i=1}^n V_{\alpha_i}$. קומפקטיות

**הגדרה.** מרחב מטרי $(X, d)$ נקרא **קומפקטי סדרתית** אם לכל סדרה $(x_n)$ ב־$X$ יש תת־סדרה מתכנסת. קומפקטיות סדרתית

**משפט 6:** מרחב מטרי קומפקטי אם"ם הוא קומפקטי סדרתית.

**הוכחה.** ($\Leftarrow$) אם $X$ אינו קומפקטי סדרתית, תהא $(x_n)_{n=1}^\infty$ סדרה שאין לה תת־סדרה מתכנסת. כל $x \in X$ אינו הגבול של תת־סדרה $(x_{n_k})$, לכן קיימת קבוצה פתוחה $V_x$ שמכילה את $x$ כך ש־$V_x \cap \{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \{x\}$. $\{V_x\}_{x \in X}$ הוא כיסוי פתוח של $X$. אילו היה לו תת־כיסוי סופי $X = \bigcup_{i=1}^n V_{x^i}$, אז $\{x_n\}_{n=1}^\infty = \bigcup_{i=1}^n V_{x^i} \cap \{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \{x^i\}_{i=1}^n$, כלומר $\{x_n\}$ עוברת על מספר סופי של נקודות, בסתירה להנחה שאין לה תת־סדרה מתכנסת. אז $X$ אינו קומפקטי.

לפני הוכחת הכיוון השני, דרושה קצת הכנה.

**הגדרה.** מרחב מטרי נקרא **ספרבילי** אם יש בו קבוצה צפופה בת־מניה.

**טענה 7:** מרחב מטרי קומפקטי סדרתית הוא ספרבילי. (– כתרגיל.)

**טענה 8:** במרחב מטרי ספרבילי, לכל כיסוי על־ידי קבוצות פתוחות $X = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$ יש תת־כיסוי בן־מניה.

**הוכחה.** $X$ ספרבילי, לכן קיימת סדרה בת־מניה של כדורים $B_1, B_2, \ldots \subseteq X$ כך שלכל קבוצה פתוחה $V$ ואיבר בה $x$, $x \in B_n \subseteq V$ עבור $n$ כלשהו. כעת, אם נתון כיסוי פתוח $X = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$ אז לכל $x \in X$, $x \in V_{\alpha(x)}$ עבור איזשהו $\alpha(x)$, ועבור איזשהו $n(x)$, $x \in B_{n(x)} \subseteq V_{\alpha(x)}$. אז $X = \bigcup_{n \,:\, \exists x | n = n(x)} B_n$. לכל $n$ שמשתתף באיחוד זה, כלומר $n = n(x)$ עבור $x$ כלשהו, ניקח

$V_n = V_{n(x)}$ עבור אותו $x$ (אבל רק פעם אחת). נקבל ש־$X = \bigcup_{n\,:\,\exists x | n=n(x)} V_n$ הוא תת־כיסוי בן־מניה של הכיסוי המקורי.

כעת נוכל להוכיח את הכיוון השני: 21.5.2008

**הוכחה.** ($\Rightarrow$) נניח ש־$X$ קומפקטי סדרתית. יהי $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ כיסוי פתוח בן־מניה של $X$. נראה שיש לו תת כיסוי סופי: אם לא, לכל $n \geq 1$ קיימת נקודה $x_n \in X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} V_k$. לסדרה $(x_n)_n$ יש תת־סדרה מתכנסת, $x_{n_k} \overset{k\to\infty}{\to} x$. עבור $N$ כלשהו, $x \in V_N$, אבל $x_{n_k} \notin V_N$ לכל $n_k > N$, בסתירה להנחה ש־$x_{n_k} \to x$.

# 2 מרחבים טופולוגיים

## 2.1 הגדרה

מרחב טופולוגי

**הגדרה.** **מרחב טופולוגי** הוא קבוצה $X$ ואוסף $J$ של תת־קבוצות של $X$ ("קבוצות פתוחות"), שמקיים –

1. $X, \varnothing \in J$;
2. איחוד כלשהו של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה;
3. חיתוך מספר סופי של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה.

$J$ נקראת **הטופולוגיה** של $(X, J)$.

**דוגמה.** כל מרחב מטרי הוא מרחב טופולוגי.

**דוגמה.** לכל קבוצה $X$, אפשר להגדיר את **הטופולוגיה הטריוויאלית** – מכילה רק את $X$ ואת $\varnothing$.[5] ניתן גם להגדיר את **הטופולוגיה הדיסקרטית** – $J = 2^X = P(X)$.[6]

הטופולוגיה המושרה

**דוגמה.** הטופולוגיה המושרה: אם $X$ מרחב טופולוגי ו־$A \subseteq X$, נגדיר שקבוצה $U \subseteq A$ **פתוחה יחסית ב־**$A$ אם $U = A \cap V$ כאשר $V \subseteq X$ פתוחה ב־$X$.

**דוגמה.** טופולוגיית המשלים הסופי על קבוצה $X$: $U \subseteq X$ פתוחה אם $U = \varnothing$ או $X \setminus U$ סופית. (במילים אחרות, $F \subseteq X$ סגורה אס"ם $F$ היא המרחב כולו או $F$ סופית.)

קבוצה סגורה

**הגדרה.** קבוצה במרחב טופולוגי היא **סגורה** אס"ם המשלים שלה פתוח.

פנים

**הגדרה.** ה**פנים** של קבוצה $A \subseteq X$ הוא $A^\circ = \{x \in A \mid x \in V \subseteq A, V \text{ is open}\}$.

$A^\circ$ היא איחוד כל הקבוצות הפתוחות המוכלות ב־$A$, או הקבוצה הפתוחה הגדולה ביותר המוכלת ב־$A$ (משתתפת באיחוד, לכן מספיק לקחת אותה).

סגור

**הגדרה.** ה**סגור** של קובצה $A \subseteq X$ הוא חיתוך כל הקבוצות הסגורות שמכילות את $A$, או הקבוצה הסגורה הקטנה ביותר שמכילה את $A$. מסמנים $\overline{A}$.

## 2.2 בסיסים ותת־בסיסים

בסיס

**הגדרה.** **בסיס** (או **בסיס סביבות**) של קבוצה $X$ הוא אוסף $B \subseteq P(X)$ של תת־קבוצות של $X$ המקיים –

1. לכל $x \in X$ קיימת $U \in B$ כך ש־$x \in U$;

[5] זו הטופולוגיה ה"גסה" (קטנה) ביותר: שתי נקודות שביניהן קבוצה פתוחה הן "רחוקות", והטופולוגיה הטריוויאלית לא מבדילה בין נקודות במובן זה.

[6] זו הטופולוגיה ה"עדינה" (גדולה) ביותר על $X$.

2. אם $x \in U_1 \cap U_2$, $U_1, U_2 \in B$, אז קיימת $U_3 \in B$ כך ש־$x \in U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$.

טופולוגיה נוצרת על־ידי בסיס

**הגדרה.** בהינתן קבוצה $X$ עם בסיס $B$, **הטופולוגיה הנוצרת על־ידי** $B$ ניתנת על־ידי הקבוצה $J = \{U \subseteq X \mid \forall x \in U \quad \exists V \in B \,:\, x \in V \subseteq U\}$. (קל לבדוק שזו אכן טופולוגיה.)

**טענה 9:** קבוצה פתוחה בטופולוגיה הנוצרת על־ידי בסיס $B$ אם״ם היא איחוד של איברי $B$. 26.5.2008

**הוכחה.** אם $U$ פתוחה, לכל $x \in U$ קיימת $x \in V_x \in B$ כך ש־$V_x \subseteq U$. אבל אז מתקבל $U = \bigcup_{x \in U} V_x$. בכיוון השני, כל איבר של $B$ הוא קבוצה פתוחה, לכן איחוד איברי $B$ גם פתוחה.

**מסקנה 10:** הטופולוגיה הנוצרת על־ידי $B$ היא הטופולוגיה המינימלית המכילה את איברי $B$ כקבוצות פתוחות.

**טענה 11:** אם $B$ ו־$B'$ בסיסים לטופולוגיות $J$ ו־$J'$ בהתאמה על $X$, אז $J'$ עדינה יותר מ־$J$ (כלומר $J \subseteq J'$) אם״ם לכל $x \in X$ וקבוצה $x \in U \in B$ קיימת $U' \in B'$ כך ש־$x \in U' \subseteq U$.

**הוכחה.** אם $J \subseteq J'$ ונתונים $x \in X$, $x \in U \in B$, אז $U \in B \subseteq J \subseteq J'$ כלומר $U$ פתוחה לפי $J'$ ולכן, לפי הגדרת $J'$, קיימת $U' \in B'$ כך ש־$x \in U' \subseteq U$.

בכיוון השני, נניח שמתקיים התנאי ונראה כי $J \subseteq J'$: אם $U \in J$, אז לכל $x \in U$ קיימת $x \in V \in B$ (לפי הגדרת $J$) כך ש־$x \in V \subseteq U$, אבל אז לפי ההנחה קיימת $V' \in B'$ כך ש־$x \in V' \subseteq V$, ובסך־הכל $x \in V' \subseteq V \subseteq U$. לכן $U$ פתוחה לפי $J'$.

לפעמים במקום לייצר בסיס מטופולוגיה, מתחילים מטופולוגיה ורוצים לעבוד עם בסיס:

**טענה 12:** אם $X$ מרחב טופולוגי ו־$C$ אוסף קבוצות פתוחות כך שלכל סביבה פתוחה[7] $x \in U$ יש קבוצה $V \in C$ כך ש־$x \in V \subseteq U$, אז $C$ בסיס לטופולוגיה של $X$. כלומר, זו הטופולוגיה הנוצרת על־ידי $C$.

תת־בסיס

**הגדרה.** אוסף קבוצות $C \subseteq P(X)$ נקרא **תת־בסיס** אם איברי $C$ מכסים את $X$.

בהינתן תת־בסיס $C$, הבסיס הנוצר ממנו הוא אוסף החיתוכים הסופיים של איברי $C$. (קל לבדוק שזה בסיס.)

### 2.3 רציפות

**הגדרה.** יהיו $X$ ו־$Y$ מרחבים טופולוגיים. פונקציה $f : X \to Y$ נקראת **רציפה** אם לכל קבוצה פתוחה $U \subseteq Y$, $f^{-1}(U)$ פתוחה ב־$X$.

**דוגמה.** כל פונקציה קבועה רציפה. (התמונה ההפוכה היא כל המרחב או $\varnothing$, ואלו ודאי קבוצות פתוחות.)

[7] הכוונה ב״סביבה פתוחה״ של $x$ היא לקבוצה פתוחה שמכילה את $x$

**דוגמה.** כל פונקציה ממרחב דיסקרטי רציפה.

**דוגמה.** כל פונקציה לתוך מרחב עם הטופולוגיה הטריוויאלית רציפה.

**דוגמה.** אם $A \subseteq X$ ו־$X$ מרחב טופולוגי, פונקציית ההכלה $i : A \to X$, $i(a) = a \in X$ היא רציפה בטופולוגיה המושרה. (בדיקה: אם $U \subseteq X$ פתוחה, אז $i^{-1}(U) = U \cap A$ פתוחה יחסית ב־$A$.) למעשה, הטופולוגיה המושרה היא הטופולוגיה המינימלית על $A$ שהופכת את $i : A \to X$ לרציפה.

**דוגמה.** אם $X = V \cup W$ עבור $V$ ו־$W$ פתוחות (לאו דווקא זרות) ונתונה $f : X \to Y$ כך ש־$f|_V$ ו־$f|_W$ רציפות, אז $f$ רציפה.

## 2.4 שקילות טופולוגית

**הגדרה.** פונקציה $f : X \to Y$ נקראת **הומיאומורפיזם** ("שקילות טופולוגית") אם $f$ חד־חד ערכית, על ורציפה והפונקציה ההפכית $f^{-1}$ רציפה.[8] הומיאומורפיזם

אם $X$ ו־$Y$ מרחבים טופולוגיים וקיים הומיאומורפיזם $f : X \to Y$, אומרים ש־$X$ ו־$Y$ **הומיאומורפיים** ("שקולים טופולוגית").

בעיה חשובה בטופולוגיה היא איפיון מרחבים טופולוגיים עד־כדי הומיאומורפיזם.

**דוגמה.** $(0,1)$ הומיאומורפי ל־$\mathbb{R}$, אבל לא ל־$[0,1]$.

**דוגמה.** $\mathbb{R}$ לא הומיאומורפי ל־$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ($\mathbb{R}$ קשיר אך $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ לא).

**דוגמה.** $\mathbb{R}^2$ לא הומיאומורפי ל־$\mathbb{R}$ ($\mathbb{R} \setminus \{0\}$ לא קשיר, אבל $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y)\}$ כן).

**דוגמה.** באופן כללי, $\mathbb{R}^n$ לא הומיאומורפי ל־$\mathbb{R}^m$, $n \neq m$.

**דוגמה.** $\mathbb{R}^n$ ו־$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ לא הומיאומורפיים (הוכחה: טופולוגיה אלגברית).

## 2.5 קשירות וקשירות מסילתית

### 2.5.1 הגדרה

28.5.2008 **הגדרה.** מרחב טופולוגי $X$ נקרא **קשיר מסילתית** אם לכל זוג נקודות $x, y \in X$ קיימת מסילה רציפה $\Phi : [0,1] \to X$ כך ש־$\Phi(0) = x$, $\Phi(1) = y$. קשירות מסילתית

**הגדרה.** $X$ נקרא **קשיר** אם אין כיסוי שלו מהצורה $X = U \cup V$ כאשר $U$ ו־$V$ פתוחות, זרות ולא־ריקות. קשירות

[8] במילים אחרות, $f$ הומיאומורפיזם אם $f$ הפיכה ולכל $U \subseteq X$, $U$ פתוחה אם"ם $f(U)$ פתוחה.

**טענה 13 (הגדרות שקולות לקשירות):** $X$ קשיר אס"ם –

1. אין כיסוי על־ידי שתי פתוחות זרות לא־טריוויאליות ($X$, $\varnothing$);
2. אין קבוצה פתוחה וסגורה לא־טריוויאלית;
3. אין העתקה רציפה $f : X \to \{0,1\}$ (עם הטופולוגיה הדיסקרטית) שאינה קבועה.

**הוכחה.** אם $X = U \cup V$ כיסוי על־ידי פתוחות זרות לא־ריקות, נגדיר $f(x) = 0$ עבור $x \in U$, $f(x) = 1$ עבור $x \in V$ – רציפה. בכיוון השני, אם נתונה $f : X \to \{0,1\}$ רציפה ולא קבועה, אז $X = f^{-1}(0) \cup f^{-1}(1)$ כיסוי על־ידי פתוחות זרות ולא־ריקות.

### 2.5.2 איחוד זר של מרחבים טופולוגיים

אם מרחב טופולוגי אינו קשיר, ניתן לפרק אותו לאיחוד מרחבים טופולוגיים ש"אין ביניהם קשר".

**הגדרה.** אם $X$ ו־$Y$ שני מרחבים טופולוגיים, נגדיר את האיחוד הזר שלהם $X \sqcup Y$ להיות המרחב הטופולוגי שקבוצת הנקודות שלו היא $(\{0\} \times X) \cup (\{1\} \times Y)$; קבוצה $U \subseteq X \cup Y$ היא פתוחה אס"ם $U \cap (\{0\} \times X)$ פתוחה וגם $U \cap (\{1\} \times Y)$ פתוחה.

איחוד זר

**הגדרה.** באופן כללי, אם $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ משפחה של מרחבים טופולוגיים, **האיחוד הזר** $\bigsqcup_{\alpha \in I} X_\alpha$ יוגדר להיות המרחב על קבוצת הנקודות $\bigcup_{\alpha \in I} (\{\alpha\} \times X_\alpha)$ שבו קבוצה פתוחה אס"ם החיתוך שלה עם כל $\{\alpha\} \times X_\alpha$ פתוח.

מכאן, הגדרה שקולה נוספת לקשירות: $X$ קשיר אס"ם הוא אינו הומיאומורפי לאיחוד זר של שני מרחבים טופולוגיים לא־ריקים.

**דוגמה.** $\mathbb{N} \cong \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \{n\}$ (או $\bigsqcup \{1\}$).

**דוגמה.** $\mathbb{Q} \ncong \bigsqcup_{r \in \mathbb{Q}} \{r\}$, אבל $\mathbb{Q}$ לא קשיר: למשל, $\mathbb{Q} = ((-\infty, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}) \cup ([\sqrt{2}, \infty) \cap \mathbb{Q})$ או, באופן שקול, $\mathbb{Q} \cong ((-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}) \sqcup ((\sqrt{2}, \infty) \cap \mathbb{Q})$.

### 2.5.3 תכונות של קבוצות קשירות

**טענה 14:** תמונה רציפה של מרחב קשיר קשירה.

**הוכחה.** על־ידי פונקציות רציפות ל־$\{0,1\}$. אם $f(X)$ לא קשיר, קיימת $g : f(X) \to \{0,1\}$ רציפה ולא קבועה. אז ההרכבה $g \circ f : X \to \{0,1\}$ רציפה ולא קבועה; לכן $X$ לא קשיר.[9]

**טענה 15:** סגור של מרחב קשיר (במרחב גדול יותר) קשיר.

[9] מובלעת כאן הטענה שהרכבת פונקציות רציפות רציפה: אם $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ רציפות, $U \subseteq Z$ פתוחה אז $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)) \subseteq X$. מרציפות $g$, $g^{-1}(U)$ פתוחה, ולכן מרציפות $f$, $f^{-1}(g^{-1}(U))$ פתוחה.

**הוכחה.** אם $\bar{A}$ לא קשיר, קיימת $f : \bar{A} \to \{0,1\}$ רציפה ולא קבועה. אז $f\mid_A : A \to \{0,1\}$ רציפה. נניח $f\mid_A \equiv 0$; אבל $f^{-1}(\{1\}) \subseteq \bar{A}$ פתוחה ולא ריקה ולכן חותכת את $A$,[10] בסתירה.[11]

**טענה 16:** אם $X = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ כאשר $A_\alpha$ קבוצות קשירות שכל שתיים מהן נחתכות, $X$ קשיר.

4.6.2008 **הוכחה.** כל פונקציה רציפה מ־$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ ל־$\{0,1\}$ קבועה על כל $A_\alpha$. מכיוון שכל $A_{\alpha_1}$ ו־$A_{\alpha_2}$ חופפות, על פונקציה כזו להיות קבועה בכל $X$.[12]

#### 2.5.4 רכיבי קשירות

**הגדרה.** **רכיב קשירות** במרחב טופולוגי $X$ הוא קבוצה קשירה מקסימלית (כלומר, שאינה מוכלת באף קבוצה קשירה גדולה יותר). רכיב קשירות

כל מרחב טופולוגי $X$ מתפרק לאיחוד זר של רכיבי קשירות (כקבוצות, על־ידי הגדרת יחס שקילות – שתי נקודות שקולות אם הן באותו רכיב קשירות, אך לא כמרחבים טופולוגיים).

**דוגמה.** $\mathbb{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{n\}$, ובמקרה זה גם $\mathbb{N} = \bigsqcup_{n=1}^{\infty}\{n\}$.

**דוגמה.** $\mathbb{Q} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}}\{r\}$, אבל $\mathbb{Q} \neq \bigsqcup_{r\in\mathbb{Q}}\{r\}$ (כי $\{r\}$ אינה קבוצה פתוחה ב־$\mathbb{Q}$).

**הגדרה.** מרחב נקרא **אי־קשיר לחלוטין** אם כל נקודה היא רכיב קשירות.

**דוגמה.** $\mathbb{N}$ ו־$\mathbb{Q}$ עם המטריקה הסטנדרטית; $\mathbb{Z}$ עם המטריקה ה־$p$־אדית.

#### 2.5.5 קשירות וקשירות מסילתית

**טענה 17:** תמונה רציפה של מרחב קשיר מסילתית היא קשירה מסילתית.

**הוכחה.** טריוויאלי (על־ידי הרכבת פונקציות רציפות).

**טענה 18:** מרחב קשיר מסילתית הוא קשיר.

**הוכחה.** תהי $f : X \to \{0,1\}$ רציפה. אם $x, y \in X$, תהי $\Phi : [0,1] \to X$ מסילה רציפה עם $\Phi(0) = x$, $\Phi(1) = y$. אז $f \circ \Phi : [0,1] \to \{0,1\}$ היא פונקציה רציפה על $[0,1]$, שהוא מרחב קשיר, ולכן קבועה; בפרט, $f(x) = (f\circ\Phi)(0) = (f\circ\Phi)(1) = f(y)$.

**דוגמה (מרחב קשיר שאינו קשיר מסילתית).** נסמן $G = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \ : \ 0 < x < 1\}$. $G$ קשיר מסילתית ולכן קשיר; לכן $X = \bar{G} = G \cup \{(0,y) \ : \ -1 \le y \le 1\}$ (בתוך $\mathbb{R}^2$) גם קשיר. אבל $X$ איננו קשיר מסילתית.

[10] $x \in \bar{A}$ אם"ם כל סביבה של $x$ חותכת את $A$.

[11] מובלעת כאן הטענה שצמצום פונקציה רציף: אם $f : X \to Y$ רציפה, $A \subseteq X$, $U \subseteq Y$ פתוחה אז $f\mid_A^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap A \subseteq A$ והיות ש־$f^{-1}(U)$ פתוחה, מתקבלת קבוצה פתוחה ב־$A$ עם הטופולוגיה המושרה.

[12] בכיתה ההוכחה ניתנה בדרך הציור.

קשירות מסילתית מקומית

**הגדרה.** $X$ נקרא **קשיר מסילתית מקומית** אם לכל נקודה בו יש סביבה קשירה מסילתית.

**טענה 19:** מרחב קשיר שהוא קשיר מסילתית מקומית הוא קשיר מסילתית.

**הוכחה.** נקבע $x \in X$ ונגדיר $A = \{y \in X \ : \ \text{קיימת מסילה רציפה בין } x \text{ ל־} y\}$. נראה $A = X$. $A$ לא ריקה (מכילה את $x$). $A$ פתוחה, כי אם $y \in A$, ל־$y$ יש סביבה קשירה מסילתית שלכן כל איבריה גם ב־$A$. $A^C$ פתוחה, כי אם $y \in A^C$ אז אין מסילה מ־$y$ ל־$x$ ולכן גם אין מסילה מכל איבר בסביבה הקשירה־מסילתית של $y$ ל־$x$. לכן, מקשירות, נובע ש־$A = X$.

### 2.5.6 שאלת קשירות מרחבים

11.6.2008

שאלות על קשירות הרבה פעמים קשות; למשל, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ ו־$S^n$ קשירים, אבל

$$O(n) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \ : \ AA^t = I\}$$

אינו קשיר ($\det : O(n) \to \{-1, 1\}$ רציפה אך לא קבועה). מצד שני,

$$SO(n) = \{A \in O(n) \ : \ \det(A) = 1\}$$

קשיר (גם מסילתית).

בהינתן מרחבים מטריים $X$ ו־$Y$ כאשר $X$ קומפקטי, נסמן

$$Y^X \supseteq \mathrm{Map}(X, Y) = \{f : X \to Y \ : \ f \text{ is continuous}\}$$

ונגדיר את **המטריקה האחידה** על $\mathrm{Map}(X, Y)$ על־ידי $d(f, g) = \sup_{x\in X} d(f(x), f(y))$.[13]

**דוגמה.** מרחב המסילות ב־$\mathbb{R}$ $\mathrm{Map}([0, 1], \mathbb{R})$ קשיר מסילתית.[14] כך גם $\mathrm{Map}([0, 1], S^1)$. באופן כללי, מרחב המסילות ב־$X$ $\mathrm{Map}([0, 1], X)$ קשיר מסילתית אם $X$ קשיר מסילתית. $\mathrm{Map}(S^1, \mathbb{R})$ – מסילות סגורות ב־$\mathbb{R}$;[15] מרחב זה קשיר מסילתית, אך בהמשך נוכיח כי $\mathrm{Map}(S^1, S^1)$ איננו קשיר.[16] למעשה, באופן כללי, לא ידוע האם $\mathrm{Map}(S^k, S^l)$ קשיר.

## 2.6 אקסיומות ההפרדה

### 2.6.1 אקסיומות ההפרדה

מרחב $T_0$

**אקסיומה ($T_0$).** מרחב טופולוגי נקרא **מרחב** $T_0$ אם לכל $x \neq y \in X$ קיימת סביבה פתוחה של $x$ שאינה מכילה את $y$, או קיימת סביבה פתוחה של $y$ שאינה מכילה את $x$.

מרחב $T_1$

**אקסיומה ($T_1$).** מרחב נקרא **מרחב** $T_1$ אם לכל $x \neq y \in X$, קיימת סביבה פתוחה של $x$ שלא מכילה את $y$ וסביבה פתוחה של $y$ שלא מכילה את $x$.[17]

[13]מטריקה זו נקראת גם **המטריקה האוניפורמית** או **מטריקת ההתכנסות במידה שווה**.

[14]ניתן להראות את הקשירות על־ידי בניית פונקציות ביניים בין שתי מסילות נתונות.

[15]לכל נקודה $a$ על המעגל, מגיעים ל־$f(a)$ מלמעלה ומלמטה.

[16]אינטואיטיבית, זה אומר שאי־אפשר לשחרר גומייה הכרוכה על מוט – אם מסתכלים על ההעתקה הקבועה ועל העתקות המעבירות את המעגל לעצמו $n \in \mathbb{Z}$ פעמים.

[17]מכך נובע שכל נקודה היא קבוצה סגורה. לכן גם כל קבוצה סופית היא סגורה, כלומר טופולוגיית $T_1$ מכילה את (היא עידון של) טופולוגיית המשלים הסופי – טופולוגיית המשלים הסופי היא טופולוגיית $T_1$ המינימלית.

**אקסיומה ($T_2$ - האוסדורף).** מרחב נקרא **מרחב** $T_2$ או **מרחב האוסדורף** אם לכל $x \neq y \in X$ קיימות סביבות פתוחות $x \in U$, $y \in V$ כך ש־$U \cap V = \varnothing$. מרחב האוסדורף

13.6.2008 **טענה 20:** מרחב $X$ הוא האוסדורף אם ורק אם האלכסון $\Delta = \{(x,x) \ : \ x \in X\} \subseteq X \times X$ סגור ב־$X \times X$ עם טופוגלויית המכפלה. (תרגיל.)

16.6.2008 **אקסיומה ($T_3$ - רגולרי).** מרחב נקרא **מרחב** $T_3$ או **מרחב רגולרי** אם הוא מרחב $T_1$ וגם לכל נקודה וקבוצה סגורה (שלא מכילה אותה) יש סביבות פתוחות זרות. מרחב רגולרי

**טענה 21:** מרחב $T_1$ הוא רגולרי אם"ם לכל נקודה $x$ וסביבה פתוחה $x \in U$ קיימת פתוחה $V$ כך ש־$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

**אקסיומה ($T_4$ - נורמלי).** מרחב נקרא **מרחב** $T_4$ או **מרחב נורמלי** אם הוא מרחב $T_1$ וגם לכל זוג קבוצות סגורות זרות יש זוג סביבות פתוחות זרות שמכילות אותן, בהתאמה. מרחב נורמלי

קל לראות ש־$T_4 \Longrightarrow T_3 \Longrightarrow T_2 \Longrightarrow T_1 \Longrightarrow T_0$, אך $T_2 \not\Longrightarrow T_3$.

11.6.2008 **דוגמה.** הטופולוגיה הטריוויאלית $(X, \{\varnothing, X\})$ אינה $T_0$ אם $|X| > 1$.

**דוגמה.** $X = \mathbb{Z}$ עם הטופולוגיה $\{[n,\infty) \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$ הוא $T_0$ אך לא $T_1$: ל־$x < y \in \mathbb{Z}$, ל־$y$ קיימת סביבה שלא מכילה את $x$, אך ההיפך אינו מתקיים.

**דוגמה.** $X = \mathbb{Z}$ עם טופולוגיית המשלים הסופי (הטופולוגיה הקו־סופית) הוא $T_1$ אך לא $T_2$: לכל $x \neq y$, $\mathbb{Z} \setminus \{x\}$ פתוחה המכילה את $y$ ו־$\mathbb{Z} \setminus \{y\}$ פתוחה המכילה את $x$, אבל חיתוך שתי קבוצות קו־סופיות בהכרח איננו ריק.

16.6.2008 **דוגמה (מרחב האוסדורף שאינו רגולרי).** $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הנוצרת על־ידי בסיס הקבוצות מהצורה $(a,b)$ או $(a,b) \setminus A$, כאשר $A = \{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$.

**הוכחה.** הוא האוסדורף: עידון של טופולוגיית האוסדורף – הטופולוגיה הסטנדרטית על $\mathbb{R}$. הוא אינו רגולרי: נראה שאי־אפשר להפריד בין $0$ ל־$A$. אם $U$ סביבה של $0$ ו־$V$ פתוחה המכילה את $A$ זרות, אז $U$ מכילה קבוצת בסיס $0 \in U' \subseteq U$. אם יש $U'$ מהצורה $(a,b)$ אז חותכת את $A$, בסתירה. אחרת, $U'$ מהצורה $(a,b) \setminus A$. ניקח $n$ טבעי כך ש־$b < \frac{1}{n}$. $\frac{1}{n} \in A \subseteq V$. לכן $V$ מכילה קבוצת בסיס המכילה את $\frac{1}{n}$, כלומר קבוצה מהצורה $(a,b) \ni \frac{1}{n} \in V' = (c,d)$, ולכן בהכרח $((a,b) \setminus A) \cap (c,d) \neq \varnothing$, בסתירה.

**דוגמה (מרחב רגולרי שאינו נורמלי).** $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$ ("המישור של סונגנפריי"): $\mathbb{R}_l$ הוא הישר $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הנוצרת על־ידי קטעים מהצורה $[a,b)$, $a < b$. זהו מרחב נורמלי ובפרט רגולרי, ולכן $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$ רגולרי (נראה בהמשך). קשה להראות, אך הוא אינו נורמלי.

11.6.2008 ניתן לנסח את האקסיומות גם באמצעות נקודות גבול:

נקודת גבול **הגדרה.** נקודה $x \in X$ נקראת **נקודת גבול** של קבוצה $A \subseteq X$ אם כל סביבה פתוחה של $x$ חותכת את $A$.

**אקסיומה ($T_0$).** לכל שתי נקודות שונות $x$ ו־$y$, לפחות אחת אינה נקודת גבול של השנייה.

**אקסיומה ($T_1$).** לכל שתי נקודות שונות $x$ ו־$y$, כל אחת אינה נקודת גבול של השנייה.

**טענה 22:** תכונת $T_i$ תורשתית (עוברת לתת־מרחב) עבור $i = 0, 1, 2$. תכונת $T_i$ עוברת למכפלת מרחבי $T_i$ עבור $i = 1, 2$ (האם יש מרחב $X$ $T_0$ כך ש־$X \times X$ איננו $T_0$?). 13.6.2008

**טענה 23:** אם $Y$ האוסדורף ו־$f : X \to Y$ רציפה וחד־חד ערכית אזי גם $X$ האוסדורף.

## 2.7 מרחבים מטריים ואקסיומות ההפרדה

מרחב מטריזבילי **הגדרה.** מרחב טופולוגי נקרא **מטריזבילי** אם קיימת מטריקה הקובעת את הטופולוגיה שלו.

**טענה 24:** כל מרחב מטרי הוא רגולרי.

**הוכחה.** אם $x \in X$, $A \subseteq X$ סגורה, $x \notin A$ אזי $U = \inf\{d(x,y) \ : \ y \in A\} > 0$, כי אם $u$ היה $0$ היתה קיימת סדרת נקודות ב־$A$ ש־$x$ הוא גבולה. כעת נסמן $V = B(x, \frac{u}{2}^-)$, $U = \bigcup_{y\in A} B(y, \frac{u}{2}^-)$ ("כדור" פתוח ברדיוס $\frac{u}{2}$ מסביב ל־$A$).

$U \cap V = \varnothing$: אם $z \in U \cap V$, אז $d(z,x) < \frac{u}{2}$ וגם $d(z,y) < \frac{u}{2}$ עבור $y \in A$ כלשהו, לכן $d(x,y) < \frac{u}{2} + \frac{u}{2} = u$, בסתירה.

**טענה 25:** כל מרחב מטרי הוא נורמלי.

**הוכחה.** יהיו $A, B \subseteq X$ סגורות זרות. לכל $x \in A$ קיים $\varepsilon_x > 0$ כך ש־$B(x, \varepsilon_x^-)$ לא חותך את $B$, ולכל $y \in B$ קיים $\varepsilon_y > 0$ כך ש־$B(y, \varepsilon_y^-)$ לא חותך את $A$.

נסמן $U = \bigcup_{x\in A} B(x, \frac{\varepsilon_x}{2}^-)$, $V = \bigcup_{y\in B} B(y, \frac{\varepsilon_y}{2}^-)$. אלו קבוצות פתוחות וזרות (כמו קודם), $A \subseteq U$, $B \subseteq V$.

## 2.8 טופולוגיית המכפלה

טופולוגיית מכפלה **הגדרה.** אם $(X_\alpha)_{\alpha\in I}$ משפחה של מרחבים טופולוגיים, **טופולוגיית המכפלה** על $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ היא הטופולוגיה הנוצרת על־ידי הבסיס של קבוצות מהצורה $\prod_{\alpha\in I} U_\alpha$ כאשר לכל $\alpha \in I$, $U_\alpha \subseteq X_\alpha$ פתוחה ו־$U_\alpha = X_\alpha$ לכל $\alpha \in I$, פרט למספר סופי. 16.6.2008

פונקציית ההטלה לכל $\alpha \in I$, נסמן ב־$\pi_\alpha : \prod_{\beta\in I} X_\beta \to X_\alpha$ את **פונקציית ההטלה** לקואורדינטה ה־$\alpha$.

טופולוגיית המכפלה היא הטופולוגיה החלשה ביותר שתחתיה פונקציות ההטלות הן רציפות, כי לכל פתוחה $U_\alpha \subseteq X_\alpha$, $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ צריכה להיות פתוחה, ולכן לכל $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in I$ ופתוחות $U_1, U_2, \ldots, U_n$, $U_i \subseteq X_{\alpha_i}$, קבוצת הבסיס[18]

[18]נעיר רק שיש אי־דיוק בסימון סדר המכפלה.

$$\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_i) = \prod_{\beta \neq \alpha_1,\ldots,\alpha_n} X_\beta \times U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$$

גם צריכה להיות פתוחה.

**טענה 26:** מכפלה של מרחבי האוסדורף היא מרחב האוסדורף.

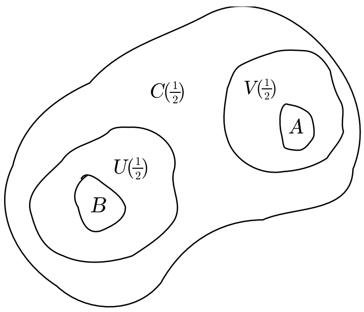
**הוכחה.** יהיו $(x_\alpha)_\alpha, (y_\alpha)_\alpha \in \prod_\alpha X_\alpha$ נקודות שונות. אז קיים $\beta \in I$ כך ש-$x_\beta \neq y_\beta$. $X_\beta$ מרחב האוסדורף ולכן קיימות סביבות פתוחות זרות $x_\beta \in U \subseteq X_\beta$, $y_\beta \in V \subseteq X_\beta$. אז $U \times \prod_{\alpha \times \beta} X_\alpha$, $V \times \prod_{\alpha \neq \beta} X_\alpha$ פתוחות זרות המכילות את $(x_\alpha)_\alpha$, $(y_\alpha)_\alpha$ בהתאמה.

**טענה 27:** מכפלה של מרחבים רגולריים היא מרחב רגולרי.

## 2.9 הלמה של אוריסון ומשפט ההרחבה של טיטצה

**למה 28 (Urysohn, 1923):** אם $X$ מרחב נורמלי, אז לכל קבוצות סגורות זרות $A, B \subseteq X$ קיימת פונקציה רציפה $f : X \to [0,1]$ כך ש-$f|_A \equiv 0$, $f|_B \equiv 1$.[20][19]

**הוכחה.** נסמן $A, B \overset{N}{\to} U, V, C$ כאשר עבור סגורות זרות $A$ ו-$B$, $U$ ו-$V$ הן פתוחות זרות כך ש-$A \subseteq U$ ו-$B \subseteq V$ (קיימות מנורמליות) ומסמנים $C = (U \cup V)^C$.




$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & A, \overbrace{C(\frac{1}{2}) \cup V(\frac{1}{2})}^{U(\frac{1}{2})^C} \arrow[r, "N"] & U(\frac{1}{4}), V(\frac{1}{4}), C(\frac{1}{4}) \arrow[r] \arrow[dr] & U(\frac{1}{8}), V(\frac{1}{8}), C(\frac{1}{8}) \\
A, B \arrow[r, "N"] & U(\frac{1}{2}), V(\frac{1}{2}), C(\frac{1}{2}) \arrow[u] \arrow[d] & & U(\frac{1}{4}) \cup C(\frac{1}{4}), V(\frac{1}{4}) \cup C(\frac{1}{4}) \xrightarrow{N} U(\frac{3}{8}), V(\frac{3}{8}), C(\frac{3}{8}) \\
 & \underbrace{C(\frac{1}{2}) \cup U(\frac{1}{2})}_{V(\frac{1}{2})^C}, B \arrow[r, "N"] & U(\frac{3}{4}), V(\frac{3}{4}), C(\frac{3}{4}) \arrow[r] \arrow[dr] & U(\frac{5}{8}), V(\frac{5}{8}), C(\frac{5}{8}) \\
 & & & U(\frac{7}{8}), V(\frac{7}{8}), C(\frac{7}{8})
\end{tikzcd}$$

לאחר השלב הראשון מתקיים

$$\varnothing = U(0) \subseteq U(\tfrac{1}{4}) \subseteq \overline{U(\tfrac{1}{4})} \subseteq U(\tfrac{1}{2}) \subseteq \overline{U(\tfrac{1}{2})} \subseteq U(\tfrac{3}{4}) \subseteq \overline{U(\tfrac{3}{4})} \subseteq U(1) = X$$

[21] באופן דומה, אבל בכיוון ההפוך,

$$X = V(0) \supseteq \overline{V(\tfrac{1}{4})} \supseteq V(\tfrac{1}{4}) \supseteq \overline{V(\tfrac{1}{2})} \supseteq V(\tfrac{1}{2}) \ldots \supseteq V(1) = \varnothing$$

---

[19] ברור שיש גרירה גם בכיוון השני.

[20] אפשר גם לחזק את הטענה: לכל $a, b \in \mathbb{R}$, לכל סגורות קיימת פונקציה רציפה $f : X \to [a,b]$, $f|_A \equiv a$, $f|_B \equiv b$.

[21] $\overline{U(\frac{1}{4})} \subseteq \overline{U(\frac{1}{4} \cup C(\frac{1}{4})} = U(\frac{1}{4}) \cup C(\frac{1}{4}) \subseteq U(\frac{1}{2})$.

באופן כללי, נגדיר באינדוקציה לכל $n$ קבוצות $U(\frac{k}{2^n}),V(\frac{k}{2^n}),C(\frac{k}{2^n})$ ($0\le k\le 2^n$) כך שלכל $k$, $U(\frac{k}{2^n})$ ו־$V(\frac{k}{2^n})$ פתוחות זרות, $C(\frac{k}{2^n}) = (U(\frac{k}{2^n})\cup V(\frac{k}{2^n}))^C$, $\overline{U(\frac{k}{2^n})}\subseteq U(\frac{j}{2^n})$ אם $k<j$ ו־$\overline{V(\frac{j}{2^n})}\subseteq V(\frac{k}{2^n})$ אם $k<j$, ו־$A\subseteq U(\frac{1}{2^n})$, $B\subseteq V(\frac{2^n-1}{2^n})$.

אם הגדרנו עד שלב $n$, נראה שניתן להרחיב לשלב ה־$n+1$:

$$\overbrace{U(\frac{k}{2^n})\cup C(\frac{k}{2^n})}^{V(\frac{k}{2^n})^C},\overbrace{C(\frac{k+1}{2^n})\cup V(\frac{k+1}{2^n})}^{U(\frac{k+1}{2^n})^C}\xrightarrow{N}U(\frac{2k+1}{2^{n+1}}),V(\frac{2k+1}{2^{n+1}}),C(\frac{2k+1}{2^{n+1}})$$

נבדוק שהתכונות נשמרות:

$$\begin{aligned}\overline{U(\tfrac{2k+1}{2^{n+1}})} &\subseteq \overline{U(\tfrac{2k+1}{2^{n+1}})\cup C(\tfrac{2k+1}{2^{n+1}})}\\ &= U(\tfrac{2k+1}{2^{n+1}})\cup C(\tfrac{2k+1}{2^{n+1}})\\ &= V(\tfrac{2k+1}{2^{n+1}})^C\\ &\subseteq U(\tfrac{2k+2}{2^{n+1}}) = U(\tfrac{k+1}{2^n})\end{aligned}$$

וכמו כן,

$$\begin{aligned}\overline{U(\tfrac{2k}{2^{n+1}})} &= \overline{U(\tfrac{k}{2^n}}\\ &\subseteq \overline{U(\tfrac{k}{2^n})\cup C(\tfrac{k}{2^n})}\\ &= U(\tfrac{k}{2^n})\cup C(\tfrac{k}{2^n})\\ &\subseteq U(\tfrac{2k+1}{2^{n+1}})\end{aligned}$$

כעת נגדיר את הפונקציה $f$. הרעיון הוא $f\le\frac{k}{2^n}$ על $U(\frac{k}{2^n})$, $f=\frac{k}{2^n}$ על $C(\frac{k}{2^n})$.

באופן כללי, נגדיר $f(x)=\inf\{\frac{k}{2^n}\ :\ x\in U(\frac{k}{2^n})\}$. אז בוודאי $f\mid_A\equiv 0$, כי $A\subseteq U(\frac{1}{2^n})$ לכל $n$; באופן דומה, $f\mid_B\equiv 1$ כי $B\subseteq U(1-\frac{1}{2^n})^C$, לכן לכל $x\in B$, $f(x)\ge 1-\frac{1}{2^n}$ לכל $n$.

נותר להראות ש־$f$ רציפה. אבל מהגדרת $f$ נובע (1) $f(x)<\frac{j}{2^n}$ אס"ם קיים $\frac{j}{2^n}>\frac{k}{2^m}$ כך ש־$x\in U(\frac{k}{2^m})$, ו־(2) $f(x)\le\frac{j}{2^n}$ אס"ם לכל $\frac{k}{2^m}>\frac{j}{2^n}$ מתקיים $x\in U(\frac{k}{2^m})$. לכן מקבלים $f^{-1}([0,\frac{j}{2^n}))=\bigcup_{\frac{k}{2^m}<\frac{j}{2^n}}U(\frac{k}{2^m})$ (זהו איחוד של פתוחות ולכן פתוחה), ובאופן דומה $f^{-1}((\frac{j}{2^n},1])=X\setminus\bigcap_{\frac{k}{2^m}>\frac{j}{2^n}}U(\frac{k}{2^m})=X\setminus\bigcap_{\frac{k}{2^m}>\frac{j}{2^n}}\overline{U(\frac{k}{2^m})}$ גם פתוחה.

אז $f(x)\le\frac{j}{2^n}$ אס"ם לכל $\frac{k}{2^m}>\frac{j}{2^n}$ מתקיים $x\in U(\frac{k}{2^m})$. במילים אחרות, 18.6.2008

$$\cap_{\frac{k}{2^m}>\frac{j}{2^n}}\overline{U(\frac{k}{2^m})}=\cap_{\frac{k}{2^m}>\frac{j}{2^n}}U(\frac{k}{2^m}=\{x\ :\ f(x)\le\frac{j}{2^n}\}=f^{-1}([0,\frac{j}{2^n}])$$

סגורה.[22]

באופן דומה (ומעט יותר קל), $\bigcup_{\frac{k}{2^m}<\frac{j}{2^n}}U(\frac{k}{2^m})=\{x\ :\ f(x)<\frac{j}{2^n}\}=f^{-1}([0,\frac{j}{2^n}))$ פתוחה.

הראינו שהתמונה ההפוכה של פתוחה בסיסית היא פתוחה (עבור בסיס הקבוצות מהצורה $(\frac{j_1}{2^n},\frac{j_2}{2^n})$, $[0,\frac{j}{2^n})$, $(\frac{j}{2^n},1]$); לכן $f$ רציפה.

**משפט 29 (ההרחבה של Tietze):** אם $X$ מרחב טופולוגי נורמלי, אז לכל קבוצה סגורה $A\subseteq X$ לכל פונקציה רציפה $f\ :\ A\to[a,b]$ (עבור $a<b$ ממשיים) קיימת הרחבה $F\ :\ X\to[a,b]$ רציפה של $f$, כלומר $F\mid_A\equiv f$.

[22] השוויון של חיתוך הסגור של הקבוצות לחיתוכן ללא הסגור נובע מכך ש־$\overline{U(\frac{k}{2^m})}\subseteq U(\frac{k+1}{2^m})$.

**הערות על טורים אינסופיים של פונקציות ממשיות על מרחבים טופולוגיים**

אם $(f_n)_{n=1}^\infty$ סדרת פונקציות ממשיות $f_n : X \to \mathbb{R}$, הטור האינסופי $\sum_{n=1}^\infty f_n$ הוא הפונקציה $X \to \mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי $x \mapsto \sum_{n=1}^\infty f_n(x)$, בתנאי שהטור מתכנס לכל $x \in X$. בתנאים המתאימים, נדע ש־$\sum f_n$ רציפה.

**טענה 30:** אם כל $f_n$ רציפה וקיימת סדרת מספרים חיוביים $M_n$ כך ש־$\sum_{n=1}^\infty M_n < \infty$ ולכל $n$ ו־$x \in X$ מתקיים $|f_n(x)| < M_n$, אז הטור $f = \sum_{n=1}^\infty f_n$ מוגדר כפונקציה רציפה על $X$.

**הוכחה.** יהי $\varepsilon > 0$. נקבע $N \in \mathbb{N}$ גדול מספיק כך ש־$\sum_{n=N+1}^\infty M_n < \frac{\varepsilon}{3}$. אז גם לכל $x \in X$, $|f(x) - \sum_{n=1}^N f_n(x)| = |\sum_{n=N+1}^\infty f_n(x)| \le \sum_{n=N+1}^\infty M_n < \frac{\varepsilon}{3}$. נקבע כעת $x \in X$. הפונקציה $\sum_{n=1}^N f_n$ רציפה,[23] לכן קיימת סביבה פתוחה $U$ של $x$ כך שלכל $y \in U$, $|\sum_{n=1}^N f_n(x) - \sum_{n=1}^N f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$. מקבלים שלכל $y \in U$,

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &= |\sum_{n=1}^N f_n(x) - \sum_{n=1}^N f_n(y) + \sum_{n=N+1}^\infty f_n(x) - \\ &\quad - \sum_{n=N+1}^\infty f_n(y)| \\ &\le |\sum_{n=1}^N f_n(x) - \sum_{n=1}^N f_n(y)| + |\sum_{n=N+1}^\infty f_n(x)| + \\ &\quad + |\sum_{n=N+1}^\infty f_n(y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

במילים אחרות, הראינו $U \subseteq f^{-1}((f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon))$, כלומר $f$ רציפה ב־$x$.

נשוב להוכחת משפט ההרחבה של טיטצה:

23.6.2008 **הוכחה.** בלי הגבלת הכלליות, נניח $[a,b] = [-1,1]$. נבנה את $F$ כטור מתכנס של פונקציות שמתכנס ל־$f$ על $A$.

**צעד 1:** נגדיר קבוצות סגורות $K_1 = f^{-1}([-1,-\frac{1}{3}]) \subseteq A$, $H_1 = f^{-1}([\frac{1}{3},1]) \subseteq A$. הן זרות, לכן לפי הלמה של אוריסון קיימת פונקציה רציפה $F_1 : X \to [-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$ כך ש־$F_1 |_{K_1} \equiv -\frac{1}{3}$, $F_1 |_{H_1} \equiv \frac{1}{3}$. נשים לב שלכל $x \in A$ מתקיים $|f(x) - F_1(x)| \le \frac{2}{3}$ (יש לבדוק זאת בנפרד ל־$x \in K_1$, $x \in H_1$, $x \in A \setminus K_1 \setminus H_1$).

**צעד 2:** נגדיר קבוצות סגורות $K_2 = (f-F_1)^{-1}([-\frac{2}{3},-\frac{2}{9}])$, $H_2 = (f-F_1)^{-1}([\frac{2}{9},\frac{2}{3}])$. הן זרות. מהלמה של אוריסון קיימת פונקציה רציפה $F_2 : X \to [-\frac{2}{9},\frac{2}{9}]$ כך ש־$F_2 |_{K_2} \equiv -\frac{2}{9}$, $F_2 |_{H_2} \equiv \frac{2}{9}$. אז לכל $x \in A$ מתקיים $|f(x) - F_1(x) - F_2(x)| \le \frac{4}{9}$.

**צעד $n+1$:** נניח שבנינו פונקציות רציפות $F_1, F_2, \ldots, F_n$ כך ש־$F_i : X \to [-\frac{2^{i-1}}{3^i},\frac{2^{i-1}}{3^i}]$ ולכל $x \in A$ מתקיים $|f(x) - \sum_{i=1}^n F_i(x)| \le \frac{2^n}{3^n}$. נגדיר קבוצות סגורות

$$K_{n+1} = (f - \sum_{i=1}^n F_i)([-\frac{2^n}{3^n}, -\frac{2^n}{3^{n+1}}])$$

$$H_{n+1} = (f - \sum_{i=1}^n F_i)([\frac{2^n}{3^{n+1}}, \frac{2^n}{3^n}])$$

אלו קבוצות זרות, לכן לפי אוריסון קיימת רציפה $F_{n+1} : X \to [-\frac{2^n}{3^{n+1}},\frac{2^n}{3^{n+1}}]$ המקיימת $F_{n+1} |_{H_{n+1}} \equiv \frac{2^n}{3^{n+1}}$, $F_{n+1} |_{K_{n+1}} \equiv -\frac{2^n}{3^{n+1}}$.

[23] סכום סופי של פונקציות רציפות.

שוב, מתקיים שלכל $x \in A$, $|f(x) - \sum_{i=1}^{n+1} F_i(x)| \le (\frac{2}{3})^{n+1}$.
כעת נגדיר $F : X \to [-1, 1]$ על־ידי $F = \sum_{i=1}^{\infty} F_n$ (מוגדר על כל $X$ כי $|F_n(x)| \le \frac{2^{n-1}}{3^n}$).
לפי הלמה, זו פונקציה רציפה. כמו כן, לכל $x \in A$ מתקיים
$$|f(x) - F(x)| = \lim_{n\to\infty} |f(x) - \sum_{i=1}^{n} F_i(x)| = 0$$
כלומר $f \equiv F |_A$.

במשפט ההרחבה אפשר גם להניח $f : A \to \mathbb{R}$ (כי $\mathbb{R}$ הומיאומורפי לקטע פתוח המכיל את $[a, b]$).
במקרה זה, ההרחבה היא פונקציה רציפה $F : X \to \mathbb{R}$.

## 2.10 קומפקטיות

### 2.10.1 הגדרה

קומפקטיות

מרחב טופולוגי $X$ נקרא **קומפקטי** אם לכל כיסוי שלו על־ידי קבוצות פתוחות קיים תת־כיסוי סופי.
תכונות:

1. תת־קבוצה סגורה של מרחב קומפקטי היא קומפקטית.

**הוכחה.** $X$ קומפקטי, $A \subseteq X$ סגורה. בהינתן כיסוי פתוח $A = \bigcup_{\alpha\in I} V_\alpha$ של $A$, כל $V_\alpha$ היא מהצורה $A \cap U_\alpha$ כאשר $U_\alpha$ Pתוחה ב־$X$. אז $X = \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha \cup A^C$ כיסוי פתוח של $X$. יש לו תת־כיסוי סופי $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \cup A^C$, ואז $A = \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha_i}$.

2. תת־קבוצה קומפקטית של מרחב האוסדורף היא סגורה.

**הוכחה.** $A \subseteq X$ קומפקטית. לכל $y \in A^C$ ולכל $x \in A$ קיימות סביבות פתוחות זרות $x \in U_x$, $y \in V_x$. אז $\{U_x\}_{x\in A}$ כיסוי פתוח של $A$. יש לו תת־כיסוי סופי $\{U_{x_i}\}_{i=1}^{n}$, ואז $\bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$ סביבה פתוחה של $y$ שזרה ל־$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$. בנינו סביבה של $y$ שמוכלת ב־$A^C$, לכן $A^C$ פתוחה.

3. במרחב האוסדורף, אם $K, L \subseteq X$ קומפקטיות זרות, אז קיימות קבוצות פתוחות זרות $K \subseteq U$, $L \subseteq V$. (כלומר, מרחב האוסדורף קומפקטי הוא נורמלי.)

**הוכחה.** מההוכחה הקודמת, לכל $x \in L$ קיימת סביבה פתוחה $x \in G_x$ וקבוצה פתוחה $K \subseteq W_x$ כך ש־$G_x \cap W_x = \varnothing$. כעת, $L = \bigcup_{x\in L} G_x$ כיסוי פתוח של $L$. נוציא תת־כיסוי סופי $L \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} G_{x_j}$ ונסמן $V = \bigcup_{j=1}^{m} G_{x_j}$, $U = \bigcap_{j=1}^{m} W_{x_j}$. $U$ ו־$V$ הן פתוחות וזרות כך ש־$K \subseteq U$, $L \subseteq V$.

4. תמונה רציפה של קבוצה קומפקטית היא קומפקטית. (לכן פונקציה רציפה מ־$X$ קומפקטי לממשיים חסומה ומקבלת מינימום ומקסימום.)

5. כל העתקה רציפה, חד־חד ערכית ועל $f : X \to Y$ ממרחב קומפקטי $X$ למרחב האוסדורף $Y$ היא הומיאומורפיזם.

**הוכחה.** אם $C \subseteq X$ סגורה, אז $C$ קומפקטית ולכן $f(C)$ קומפקטית ולכן סגורה ב־$Y$.
קיבלנו שתמונה של סגורה סגורה – לכן $f$ הומיאומורפיזם.

### 2.10.2 קומפקטיפיקציה וקומפקטיות מקומית

אם מרחב האוסדורף אינו קומפקטי, הרבה פעמים שימושי לשכן אותו כתת־קבוצה צפופה (עם הטופולוגיה המושרה) במרחב האוסדורף קומפקטי. שיכון כזה נקרא **קומפקטיפיקציה**. קומפקטיפיקציה

האפשרות הכי פשוטה – הוספת נקודה אחת: אם $X$ מרחב האוסדורף לא קומפקטי, נסמן $X^+ = X \cup \{\infty\}$ כאשר $\infty$ – סימון לנקודה חדשה שאינה ב־$X$. נגדיר על $X^+$ טופולוגיה: קבוצה $U \subseteq X^+$ פתוחה אם $X \cap U$ פתוחה ב־$X$, ואם $\infty \in U$ אז $U$ מכילה קבוצה מהצורה $X \setminus K$ כאשר $K \subseteq X$ קומפקטית. במילים אחרות, בסיס לטופולוגיה זו הוא כל הפתוחות ב־$X$ וכל הקבוצות מהצורה $(X \setminus K) \cup \{\infty\}$ כאשר $K$ קומפקטית.

**טענה 31:** $X^+$ קומפקטי.

**הוכחה.** בהינתן כיסוי פתוח $X^+ = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$, $\infty \in U_\beta$ עבור $\beta \in I$ כלשהו. $U_\beta$ מכילה קבוצה מהצורה $X \setminus K$ כאשר $K \subseteq X$ קומפקטית. $K \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$, לכן קיים תת־כיסוי סופי $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$, ואז $X^+ \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} \cup U_\beta$.

מתי $X^+$ הוא האוסדורף (ולכן מקבלים קומפקטיזציה)?

**הגדרה.** מרחב $X$ נקרא **קומפקטי מקומית** אם לכל $x \in X$ יש סביבה פתוחה עם סגור קומפקטי (או, באופן שקול: יש סביבה פתוחה שמוכלת בקבוצה קומפקטית). קומפקטיות מקומית

**דוגמה.** $\mathbb{R}$ קומפקטי מקומית; $\mathbb{R}^n$ קומפקטי מקומית; $\mathbb{N}$ גם, אבל $\mathbb{Q}$ לא.

המרחב $\mathbb{R}^\infty = \ell_2 = \{(x_1, x_2, \dots) \ : \ x_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^\infty x_i^2 < \infty\}$ עם המטריקה $d((x_i)_{i=1}^\infty, (y_i)_{i=1}^\infty) = \sqrt{\sum_{i=1}^\infty (x_i - y_i)^2}$ הוא מרחב מצוין – מטרי, שלם וכו׳ – אך למרבה האכזבה, הוא אינו קומפקטי מקומית: ניקח $x = 0 = (0, 0, \dots)$. סביבה שלו מכילה כדור מהצורה $B(0, r) = \{y \in \ell_2 \ : \ \sum y_i^2 < r^2\}$, אבל אז יש סדרה מהצורה $a_n = (0, 0, \dots, 0, r, 0, 0, \dots)$ ($r$ במקום ה־$n$) בתוך הסגור של הסביבה, וזו סדרה ללא תת־סדרה מתכנסת.

**הגדרה.** **קומפקטיפיקציה חד־נקודתית** של מרחב האוסדורף $X$ היא מרחב האוסדורף קומפקטי $Y$ הכולל את $X$ ועוד נקודה אחת, ש־$X$ צפוף בו.

**משפט 32:** ל־$X$ (האוסדורף שאיננו קומפקטי) יש קומפקטיפיקציה חד־נקודתית אם ורק אם הוא קומפקטי מקומית, ובמקרה זה הקח״ד יחידה, כלומר אם יש שתיים $Y$ ו־$Y'$ אז יש הומיאומורפיזם $f : Y \to Y'$ ששומר על $X$, כלומר $f\mid_X \equiv id\mid_X$.

25.6.2008 **הוכחה.** יחידות: יהי $X$ מרחב האוסדורף קומפקטי מקומית, $Y$ ו־$Y'$ שני מרחבים המקיימים את תכונות הקומפקטיפיקציה החד־נקודתית: $|Y \setminus X| = 1$, $X \subseteq Y$, $\bar{X} = Y$, $Y$ האוסדורף קומפקטי.

נגדיר פונקציה $h : Y \to Y'$ על־ידי $h(x) = x$ ל־$x \in X$, $h(\infty_Y) = \infty_{Y'}$ (כאשר מסמנים $Y \setminus X = \{\infty_Y\}$, $Y' \setminus X = \{\infty_{Y'}\}$). $h$ חד־חד ערכית, על ושומרת על $X$. נראה שתמונת קבוצה פתוחה פתוחה, ומסימטרייה ינבע ש־$h$ הומיאומורפיזם.

תהא $U \subseteq Y$ פתוחה. אם $\infty_Y \notin U$ אז $U \subseteq X$ פתוחה ב־$Y$ ולכן גם ב־$X$; לכן $h(U) = U$ פתוחה ב־$X$, אבל $X$ פתוח ב־$Y'$ (כי $Y' \setminus X = \{\infty_{Y'}\}$ סגורה בגלל ש־$Y'$ האוסדורף).[24] לכן $h(U)$ פתוחה ב־$Y'$.

במקרה השני, אם $\infty_Y \in U$, אז $C = Y \setminus U$ סגורה ב־$Y$ (שהוא קומפקטי) ולכן קומפקטית. $C \subseteq X \subseteq Y'$ ולכן $C$ סגורה ב־$Y'$ (כי $Y'$ האוסדורף, והוכחנו שתת־קבוצה קומפקטית של מרחב האוסדורף סגורה בו). מכאן, $h(U) = Y' \setminus C$ פתוחה ב־$Y'$.

קיום: נתון $X$ האוסדורף קומפקטי מקומית; בנינו מרחב $X^+ = X \cup \{\infty\}$ עם טופולוגיה שתחתיה הוא קומפקטי. נוכיח שהוא האוסדורף (בהנחת קומפקטיות מקומית של המרחב $X$): אם $x \neq y \in X^+$, אז אם $x, y \in X$ קיימות ב־$X$ סביבות פתוחות זרות $U, V \subseteq X$ שמכילות את $x, y$ בהתאמה; אבל $U, V$ גם פתוחות ב־$X^+$, מהגדרת הטופולוגיה. אם $x = \infty \neq y$, אז מקומפקטיות מקומית נובע של־$y$ יש סביבה $U \subseteq X$ שמוכלת בקבוצה קומפקטית $K$. אז $U$ ו־$X^+ \setminus K$ שתי פתוחות זרות שמכילות את $y$ ואת $\infty$ בהתאמה, ולכן $X^+$ האוסדורף.

## 2.11 מרחבי מכפלה ומשפט טיכונוף

### 2.11.1 משפט טיכונוף

אם $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ משפחה של מרחבים טופולוגיים, **טופולוגיית המכפלה** על $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ היא הטופולוגיה הנוצרת על־ידי הבסיס של קבוצות מהצורה

$$\cap_{i=1}^n \pi_\alpha^{-1}(U_i) = \{x = (x_\alpha)_{\alpha \in I} \ : \ x_{\alpha_i} \in U_i, \ i = 1, \dots, n\}$$

כאשר $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$ שונים, $U_i \subseteq X_{\alpha_i}$ ל־$i = 1, \dots, n$.[25] ברור שזה בסיס, כי חיתוך קבוצות בסיס הוא קבוצת בסיס. קבוצת בסיס בטופולוגיית המכפלה נקראת **קבוצת גליל** (cylinder set).

**משפט 33 (טיכונוף):** מכפלה של מרחבים קומפקטיים היא קומפקטית (בטופולוגיית המכפלה).

#### מבט אחר על קומפקטיות

**הגדרה.** אומרים שלמשפחת תת־קבוצות $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ של קבוצה $X$ יש **תכונת החיתוך הסופי** אם כל חיתוך של מספר סופי של ה־$A_\alpha$ אינו ריק.

**ניסוח שקול לקומפקטיות 1:** $X$ קומפקטי אס"ם לכל משפחת תת־קבוצות סגורות $\{A_j\}_{j \in J}$ של $X$ המקיימת את תכונת החיתוך הסופי מתקיים $\bigcap_{j \in J} A_j \neq \varnothing$. 30.6.2008

**ניסוח שקול לקומפקטיות 2:** $X$ קומפקטי אס"ם לכל משפחת תת־קבוצות $\{A_j\}_{j \in J}$ של $X$ המקיימת את תכונת החיתוך הסופי מתקיים $\bigcap_{j \in J} \overline{A_j} \neq \varnothing$.

למה אלו ניסוחים שקולים? אם $X$ מקיים את התנאי הנ"ל, אז זה גם נכון לקבוצות סגורות $A_j$ (עבורן $\overline{A_j} = A_j$) ולכן קומפקטי לפי תנאי שקול 1. בכיוון השני, אם $X$ קומפקטי לפי תנאי 1,

[24] לא ניתן להסתמך על הגדרת הטופולוגיה של הקומפקטיפיקציה החד־נקודתית כמו למעלה, שהרי אנו מנסים להוכיח שזו הטופולוגיה האפשרית היחידה לקומפקטיפיקציה החד־נקודתית, כלומר איננו יודעים מהי הטופולוגיה על $Y'$.

[25] $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ היא פונקציית ההטלה, או פונקציית הקואורדינטה ה־$\alpha$. הדרישה בעצם היא ש־$\pi_\alpha$ תהיינה רציפות (טופולוגיית המכפלה היא הטופולוגיה החלשה ביותר שתחתיה פונקציות הקואורדינטות רציפות).

בהינתן משפחה $(A_j)$ לפי תנאי 2, מכיוון ש־$(A_j)_j$ מקיימת את תכונת החיתוך הסופי, גם $(\overline{A_j})_j$ יקיימו את תכונת החיתוך הסופי ונקבל את המסקנה ש־$\bigcap_j \overline{A_j} \neq \varnothing$.

**הלמה של צורן: תזכורת מתורת הקבוצות**

יחס "$\leq$" על קבוצה $A$ נקרא **יחס סדר חלקי** אם הוא מקיים את התנאים (א) רפלקסיביות: $x \leq x$ לכל $x \in A$; (ב) אנטי־סימטריות: אם $x \leq y$ וגם $y \leq x$ אז $x = y$; (ג) טרנזיטיביות: אם $x \leq y$ וגם $y \leq z$ אז $x \leq z$. יחס סדר חלקי הוא **מלא** אם לכל $x, y \in A$, $x \leq y$ או $y \leq x$.

בקבוצה סדורה חלקית, **חסם מלמעלה** הוא איבר $x$ כך שלכל $y$ בקבוצה מתקיים $y \leq x$. **איבר מקסימלי** הוא איבר $x$ כך שאין $y$ המקיים $y > x$ (כלומר $x \geq y$, $x \neq y$).

**למה 34 (צורן):** אם $(P, \leq)$ קבוצה סדורה חלקית (כלומר, קבוצה עם יחס סדר חלקי) כך שלכל שרשרת (תת קבוצה סדורה באופן מלא) יש חסם מלמעלה ב־$P$, אז כל איבר של $P$ חסום על־ידי איבר מקסימלי.

נחזור למשפט טיכונוף:

**הוכחה.** נסמן $X = \prod_{i \in I} X_i$, $X_i$ קומפקטיים. תהי $\mathcal{A} = (A_j)_{j \in J}$ משפחת תת־קבוצות של $X$ בעלת תכונת החיתוך הסופי. נראה ש־$\bigcap_{j \in J} \overline{A_j} \neq \varnothing$. לכל $i \in I$, תהא $\pi_i : X \to X_i$ פונקציית הקואורדינטה ה־$i$. לפי הלמה של צורן, אפשר להניח ש־$(A_j)_{j \in J}$ היא משפחה מקסימלית של תת־קבוצות של $X$ בעלת תכונת החיתוך הסופי.

יותר בפירוט: מגדירים $P$ – אוסף המשפחות של תת־קבוצות של $X$ המקיימות את תכונת החיתוך הסופי (כלומר, $P \in P(P(P(X)))$[26]), ויחס הסדר "$\leq$" הוא יחס ההכלה. (החסם מלמעלה של שרשרת הוא איחוד איבריה; הוא עדיין יקיים את תכונת החיתוך הסופי.)

בפרט, מהמקסימליות נובע ש־$(A_j)_{j \in J}$ סגורה תחת חיתוכים סופיים ושכל קבוצה שחותכת כל איבר של $(A_j)_j$ נמצאת במשפחה.

כעת, ננסה לבנות $x \in \bigcap_{j \in J} \overline{A_j}$. לכל $i \in I$, $\{\pi_i(A_j)\}_{j \in J}$ משפחה של תת־קבוצות של $X_i$ המקיימת את תכונת החיתוך הסופי, כי $\varnothing \neq \pi_i(\bigcap_{k=1}^n A_{j_k}) \subseteq \bigcap_{k=1}^n \pi_i(A_{j_k})$. לכן, מקומפקטיות $X_i$, מקבלים ש־$\bigcap_{j \in J} \overline{\pi_i(A_j)} \neq \varnothing$.

נבחר איזשהו $x_i \in \bigcap_{j \in J} \overline{\pi_i(A_j)}$ לכל $i \in I$, ויהי $x \in X = \prod_{i \in I} X_i$ שהקואורדינטה ה־$i$ שלו היא $x_i$ לכל $i \in I$. נראה ש־$x \in \bigcap_{j \in J} \overline{A_j}$: נקבע $j \in J$; בשביל להראות ש־$x \in \overline{A_j}$ נראה שלכל קבוצה פתוחה $U \subseteq X$ המכילה את $x$ יש חיתוך לא ריק עם $A_j$. מספיק להראות זאת עבור קבוצות בסיס, כלומר מהצורה $\bigcap_{k=1}^n \pi_{i_k}^{-1}(U_k)$, $U_k \subseteq X_{i_k}$ פתוחות.

ראשית, אם $U$ מהצורה $U = \pi_i^{-1}(U_i)$, $U_i \subseteq X_i$ ל־$i \in I$ (קבוצת תת־בסיס), אז $x \in U$ אומר $x_i \in U_i$. כמו כן, $x_i \in \overline{\pi_i(A_j)}$. לכן $\pi_i(A_j) \cap U_i \neq \varnothing$ (כי $U_i$ סביבה של נקודה ב־$\overline{\pi_i(A_j)}$ ולכן חותכת את $\pi_i(A_j)$) ולכן $A_j \cap U \neq \varnothing$. אם $y_i \in \pi_i(A_j) \cap U_i = \pi_i(A_j) \cap \pi_i(U) \subseteq X_i$, אז קיים $y \in A_j \subseteq X$ כך ש־$y_i = \pi_i(y)$ וכמו־כן $\pi_i(y) \in U_i$, כלומר $y \in U$ (לפי הגדרת $U$). לכן $y \in U \cap A_j$.

[26] כי $A_j \in P(X)$ ו־$\mathcal{A} \in P(P(X))$.

הראינו שלקבוצות תת־בסיס $\pi_i^{-1}(U_i) = U \ni x$ מתקיים $U \cap A_j \neq \varnothing$ לכל $j \in J$.
המסקנה היא שכל קבוצת תת־בסיס כזו $x \in U$ שייכת למשפחה $(A_j)_{j\ inJ}$ (בגלל המקסימליות – אחרת היה אפשר להוסיף את $U$ למשפחה). לכן, שוב בגלל המקסימליות, כל קבוצת בסיס $x \in U = \cap\pi_{i_k}^{-1}(U_k)$ (שהיא חיתוך סופי של קבוצות תת־בסיס) גם היא איבר במשפחה, ובפרט חותכת כל $A_j$. מכאן ש־$x \in \bigcap_{j\in J} \overline{A_j}$.
הראינו ש־$\bigcap_{j\in J} \overline{A_j} \neq \varnothing$, ולכן $X$ קומפקטי.

### 2.11.2 שימוש: משפט ארבעת הצבעים

**משפט ארבעת הצבעים**: כל מפה מישורית ניתן לצבוע בארבעה צבעים ללא גבול (חד־מימדי[27]) בין ארצות מאותו צבע.
המשפט הוכח על־ידי Appel-Haken ב־1976. אחת מהתובנות המרכזיות בהוכחה היא שמספיק לבדוק עבור מפות סופיות.

**טענה 35:** בהינתן מפה מישורית אינסופית, אם אפשר לצבוע באופן חוקי כל תת־מפה סופית שלה בארבעה צבעים, אז אפשר לצבוע את המפה בארבעה צבעים באופן חוקי. 2.7.2008

**הוכחה.** תהא $V$ קבוצת הארצות במפה. נגדיר
$$\{1,2,3,4\}^V \supseteq L_V = \{f : V \to \{1,2,3,4\} \ : \ f \text{ valid colouring}\}$$
ולכל תת־קבוצה $V' \subseteq V$ נגדיר
$$L_{V'} = \{f : V \to \{1,2,3,4\} \ : \ f\mid_{V'} \text{ valid colouring of } V'\}$$
נשים לב ש־$L_V = \bigcap_{\text{finite } V'\subseteq V} L_{V'}$: אם צביעה חוקית על $V$, היא בהכרח חוקית על כל $V' \subseteq V$; בכיוון השני, אם $f \in \bigcap_{\text{finite } V'\subseteq V} L_{V'}$ אז בפרט לכל $x \neq y \in V$, $f \in L_{\{x,y\}}$ ולכן $f(x) \neq f(y)$. מכאן ש־$f$ חוקית על $V$.

אם $V' \subseteq V$ סופית, אז $L_{V'}$ קבוצה סגורה ב־$\{1,2,3,4\}^V$ עם טופולוגיית המכפלה:
$$\begin{aligned} L_{V'} &= \bigcup_{\text{valid } g:\{1,2,3,4\}\to V'} \{f \in \{1,2,3,4\}^V \ : \ f\mid_{V'} \equiv g\} \\ &= \bigcup_{\text{valid } g\in\{1,2,3,4\}^{V'}} \bigcap_{v\in V'} \pi_v^{-1}(g(v)) \end{aligned}$$
כאשר $\pi_v : \{1,2,3,4\}^V \to \{1,2,3,4\}$ פונקציית הקואורדינטה. (זה איחוד סופי של חיתוך קבוצות בסיס בטופולוגיית המכפלה.)

נשים לב שכל קבוצה מהצורה $\bigcap_{v\in V'} \pi_v^{-1}(g(v))$ ($V' \subseteq V$ סופית) אפשר להציג בצורה $\left(\bigcup_{h:V\to\{1,2,3,4\},h\neq g} \bigcap_{v\in V'} \pi_v^{-1}(h(v))\right)^C$: משלים של איחוד (בעצמה $4^{|V|}-1$) של פתוחות בסיסיות, ולכן קבוצה סגורה.

$\{L_V\}_{\text{finite } V'\subseteq V}$ משפחת קבוצות ב־$\{1,2,3,4\}^V$ המקיימת את תכונת החיתוך הסופי: אם $V_1,\ldots,V_n \subseteq V$ סופיות, אז $\bigcap_{i=1}^n L_{v_i} \supseteq L_{(V_1\cup V_2\cup\ldots\cup V_n)} \neq \varnothing$.
המסקנה ממשפט טיכונוף היא ש־$L_V = \bigcap_{\text{finite } V'\subseteq V} L_{V'} \neq \varnothing$.

[27] כלומר, גבול בעל אורך – לא נקודה.

## 2.12 טופולוגיית המנה

טופולוגיית המנה

יהי $X$ מרחב טופולוגי ו־$\sim$ יחס שקילות עליו. תהא $\pi : X \to X/\sim$ העתקת המנה $\pi(x) = [x]$; נגדיר את **טופולוגיית המנה** על $X/\sim$ להיות הטופולוגיה שבה קבוצה $U \subseteq X/\sim$ פתוחה אם ורק אם $\pi^{-1}(U)$ פתוחה ב־$X$.

תכונות:

1. זו טופולוגיה – ברור (התמונה ההפוכה של איחוד היא איחוד התמונות ההפוכות).
2. זו הטופולוגיה הגדולה/העדינה ביותר על $X/\sim$ כך ש־$\pi : X \to X/\sim$ רציפה – קל.
3. $X/\sim$ הוא מרחב $T_1$ אם ורק אם כל מחלקת שקילות סגורה ב־$X$ ($X/\sim$ הוא $T_1$ אס"ם כל נקודה $[x]$ היא סגורה אס"ם כל $\pi^{-1}([x]) = [x]$ סגורה ב־$X$).

**דוגמה (בניית מרחב על־ידי זיהוי נקודות).** ב־$[0,1]$, נזהה את $0$ עם $1$: נגדיר יחס שקילות $x \sim x$ ל־$0 \le x \le 1$, $0 \sim 1$. אז $[0,1]/\sim = \{0 < x < 1\} \cup \{\{0,1\}\}$. מרחב זה הומיאומורפי ל־$S^1$: $x \mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$, $\{0,1\} \mapsto (1,0)$. (בדיקה שהומיאומורפיזם – כתרגיל.)

7.7.2008

**דוגמה.** אם $X$ ו־$Y$ מרחבים טופולוגיים, אז $\pi_X : X \times Y \to X$ איזומורפית להעתקת המנה $\pi : X \times Y \to X \times Y/\sim$ כאשר $\sim$ יחס השקילות על $X \times Y$ המוגדר על־ידי $(x, y) \sim (x', y')$ אס"ם $x = x'$. קל לבדוק: $\pi_X$ איזומורפית ל־$\pi$, כלומר היא העתקת מנה במובן הבא:

העתקה רציפה $p : X \to Z$, $X$ ו־$Z$ מרחבים טופולוגיים, היא **העתקת מנה** אם קיים יחס שקילות $\sim$ על $X$ וקיים הומיאומורפיזם $f : Z \to X/\sim$ כך שאם $\pi : X \to X/\sim$ העתקת מנה ביחס ל־$\sim$, אז מתקיים $f \circ p = \pi$. כלומר, הדיאגרמה הבאה היא "קומוטטיבית":

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, dashed, "p"] \arrow[d, "\pi"'] & Z \\
X/\sim \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

**דוגמה.** $\mathbb{R}/\{[0,1]\}$ הומיאומורפי ל־$\mathbb{R}$ (מזהים את $[0,1]$ כנקודה אחת). באופן יותר כללי, $\mathbb{R}^n/D^n \cong \mathbb{R}^n$ ($D^n$ כדור היחידה הסגור).

**דוגמה.** $D^2/S^1 \cong S^2$, ובאופן כללי יותר, $D^n/S^{n-1} \cong S^n$.

**דוגמה (בניית משטחים על־ידי הדבקה לאורך צלעות).** גליל –

פורמאלית, מגדירים $X = [0,1]^2$, $(x, 0) \sim (x, 1)$ לכל $0 \le x \le 1$.

טבעת מביוס

הטורוס $\mathbb{T}^2$

בקבוק קליין (לא ניתן לשיכון באופן חד־חד ערכי ב־$\mathbb{R}^3$, אבל כן ב־$\mathbb{R}^4$).

טופולוגיה אלגברית חוקרת בין היתר את המשטחים הנוצרים על־ידי הדבקות כאלה.

**דוגמה (המישור הפרוייקטיבי).** $S^2/\{x,-x\}_{x\in S^2}$

הגדרה אלטרנטיבית: $\mathbb{R}P^2$ - אוסף כל הישרים ב־$\mathbb{R}^3$ שעוברים דרך הראשית.

הצגה אחרת למישור הפרוייקטיבי: הנקודות על המישור $z=1$ מתאימות לישרים ב־$\mathbb{R}^3$, פרט לאלה שחוצים את קו המשווה. מכאן מקבלים $\mathbb{R}P^2=\mathbb{R}^2\cup\mathbb{R}P^1$ (כאשר $\mathbb{R}P^1$ הישר הפרוייקטיבי).

באופן יותר כללי, נגדיר את המרחב הפרוייקטיבי ה־$n$־מימדי $\mathbb{R}P^n$ להיות אוסף הישרים ב־$\mathbb{R}^{n+1}$ שעוברים דרך הראשית, או באופן שקול, $S^n/\{x,-x\}_{x\in S^n}$ (מכאן מקבלים את הטופולוגיה). כמקודם, יש פירוק $\mathbb{R}P^n=\mathbb{R}^n\cup\mathbb{R}P^{n-1}=\mathbb{R}^n\cup\mathbb{R}^{n-1}\cup\ldots\cup\mathbb{R}^1\cup\mathbb{R}^0$.

**הערה:** המישור הפרוייקטיבי מקיים מערכת אקסיומות של "גיאומטרייה פרוייקטיבית" שבה, בין השאר, כל שני ישרים נחתכים בנקודה אחת בדיוק.

אם $\sim$ יחס שקילות על קבוצה[28] $X$, $\pi:X\to X/\sim$ העתקת המנה, $g:X\to Y$,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X/\sim \arrow[r, dashed, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

מתי קיימת $f:X/\sim\to Y$ כך ש־$f\circ\pi=g$ (כלומר, מתי אפשר להשלים את הקו המקווקו בדיאגרמה כך שהיא תהיה קומוטטיבית)? במקרה כזה, נגיד ש־$g$ **מתפקטרת דרך** $\pi$ (factors through).

**הגדרה.** $g$ **מכבדת את יחס השקילות** $\sim$ אם לכל $x,x'\in X$, אם $x\sim x'$ אז $g(x)=g(x')$.

**טענה 36 (קלה):** $g$ מתפקטרת דרך $\pi$ אס"ם היא מכבדת את $\sim$.

**הוכחה.** אם $g$ מתפקטרת, אז עבור $x\sim x'$, $\pi(x)=\pi(x')$ ולכן

$$g(x)=f(\pi(x))=f(\pi(x'))=g(x')$$

בכיוון ההפוך, אם $g$ מכבדת את יחס השקילות, נגדיר $f:X/\sim\to Y$ על־ידי $f([x])=g(x)$. זה מוגדר היטב, כי $g$ קבועה על $[x]$.

כעת נניח $X$ מרחב טופולוגי, $Y$, $G:X\to Y$ רציפה, $\pi:X\to X/\sim$ העתקת המנה. נגיד ש־$g$ מתפקטרת דרך $\pi$ אם $g=f\circ\pi$ עבור $f:X/\sim\to Y$ רציפה.

**טענה 37:** $g$ מתפקטרת דרך $\pi$ אס"ם היא מכבדת את $\sim$.

**הוכחה.** כיוון אחד - מיידי מהטענה הקודמת. כיוון שני - אם $g$ מכבדת את $\sim$, אז לפי הטענה הקודמת $f:X/\sim\to Y$ המוגדרת על־ידי $f([x])=g(x)$ אכן מקיימת $g=f\circ\pi$; צריך להראות שהיא רציפה. אבל אם $U\subseteq Y$ פתוחה אז $g^{-1}(U)=\pi^{-1}(f^{-1}(U))$ פתוחה (כי $g$ רציפה), ולכן $f^{-1}(U)$ פתוחה, לפי הגדרת טופולוגיית המנה.

[28] איננו מניחים טופולוגיה כרגע.

עוד תכונות של טופולוגיית המנה:

1. $X/\sim$ הוא מרחב $T_1$ אם"ם כל מחלקת שקילות סגורה ב־$X$.
2. אם $X$ קשיר אז גם $X/\sim$ קשיר.
3. אם $X$ קשיר מסילתית אז גם $X/\sim$ קשיר מסילתית.
4. אם $X$ קומפקטי אז גם $X/\sim$ קומפקטי.
5. אם $X$ האוסדורף, אז $X/\sim$ לא בהכרח האוסדורף (ואפילו לא בהכרח $T_1$)
אם $X$ האוסדורף קומפקטי ו־$\sim$ סגור ב־$X\times X$ אז $X/\sim$ הוא האוסדורף.

**הוכחה.** תחילה נראה ש־$\pi$ העתקה סגורה, כלומר שאם $C\subseteq X$ סגורה אז $\pi(C)$ סגורה.
תהא $C\subseteq X$ סגורה. נסמן ב־$\pi_1$, $\pi_2$ את פונקציות הקואורדינטות על $X\times X$. אז

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(\pi(C)) &= \{y\in X\ :\ \exists x\in C\quad x\sim y\}\\ &= \pi_2(\pi_1^{-1}(C)\cap G_\sim)\\ &= \pi_2(\text{closed hence compact})\\ &= \text{compact } (\pi_2\text{'s continuous}) \text{ so closed, because Hausdorff}\end{aligned}$$

כאשר $G_\sim$ הגרף של $\sim$.[29] אז $\pi^{-1}(\pi(C))$ סגורה, ולכן $\pi(C)$ סגורה.

9.7.2008 כעת, אם $[x],[y]\in X/\sim$ נקודות שונות, אז הן סגורות ב־$X/\sim$, כי הן תמונות תחת $\pi$ של נקודות בודדות (ונקודה בודדת סגורה ב־$X$ כי הוא האוסדורף). לכן $\pi^{-1}([x])$ ו־$\pi^{-1}([y])$ קבוצות סגורות זרות ב־$X$ (שהוא האוסדורף קומפקטי ולכן נורמלי), ולכן קיימות פתוחות זרות $U,V\subseteq X$ כך ש־$\pi^{-1}([x])\subseteq U$, $\pi^{-1}([y])\subseteq V$.
נגדיר $U',V'\subseteq X/\sim$ על־ידי $U'=\pi(U^C)^C$, $V'=\pi(V^C)^C$. אלה קבוצות פתוחות ו־$[x]\in U'$, $[y]\in V'$. $a\in\pi(U^C)^C$ אם"ם $a\notin\pi(U^C)$ אם"ם $\pi^{-1}(a)\cap U^C=\varnothing$ אם"ם $\pi^{-1}(a)\subseteq U$, ולכן $U'$ ו־$V'$ זרות. זה מוכיח ש־$X/\sim$ הוא האוסדורף.

## 2.13 מרחבי פונקציות ומשפט סטון־ויירשטראס

14.7.2008 **הגדרה.** בהינתן מרחב טופולוגי $Y$ וקבוצה $X$, **טופולוגיית ההתכנסות הנקודתית** על $Y^X$ אוסף הפונקציות מ־$X$ ל־$Y$ היא הטופולוגיה הנוצרת על־ידי קבוצות $\{f\,:\,X\to Y\ :\ f(x_i)\in U_i\}$ עבור נקודות $x_1,\dots,x_n\in X$ וקבוצות פתוחות $U_1,\dots,U_n\subseteq Y$. טופולוגיית ההתכנסות הנקודתית

$\{f:X\to Y\ :\ f(x_i)\in U_i\quad i=1,\dots,n\}=\bigcap_{i=1}^n\pi_{x_i}^{-1}(U_i)$, כאשר $\pi_x:Y^X\to Y$ פונקציית הקואורדינטה ה־$x$ (בהקשר הזה, פונקציית האבליואציה/ההערכה ב־$x$): כאשר $\pi_x$ פועלת על פונקציה $f$, היא מחזירה את ערכה ב־$x$ - $(\pi_x(f)=f(x))$. כלומר, זו פשוט טופולוגיית המכפלה על $Y^X=\prod_{x\in X}Y$.

**טענה 38:** סדרת פונקציות $f_n\in Y^X$ מתכנסת לפונקציה גבולות $f\in Y^X$ בטופולוגיה זו אם"ם לכל $x\in X$, $f_n(x)\to f(x)$ (בטופולוגיה הנתונה על $X$).

[29] $\pi(C)$ סגורה עם ורק עם $\pi^{-1}(\pi(C))$, בטופולוגיית המנה.

**דוגמה.** במרחב $\mathbb{R}^{[0,1]}$ (פונקציות ממשיות על $[0,1]$) נגדיר סדרת פונקציות $f_n(x) = x^n$. אז $f_n \to f$ כאשר $f(x) = 0$ ל־$x < 1$, $f(1) = 1$. $f_n$ רציפות, אך $f$ אינה רציפה: כלומר, תת־המרחב $C([0,1],\mathbb{R})$ של פונקציות רציפות ב־$\mathbb{R}^{[0,1]}$ אינו קבוצה סגורה.

הטופולוגיה הקומפקטית־פתוחה

**הגדרה. הטופולוגיה הקומפקטית־פתוחה** על $C(X,Y)$ נוצרת על־ידי התת־בסיס של קבוצות מהצורה $\{f \in C(X,Y) \ : \ f(C) \subseteq U\}$ כאשר $C \subseteq X$ קומפקטית, $U \subseteq Y$ פתוחה.[30]

טופולוגיית ההתכנסות במידה שווה על קומפקטית

**הגדרה.** במקרה ש־$Y$ הוא מרחב מטרי, **טופולוגיית ההתכנסות במידה שווה על קומפקטית** על $Y^X$ היא הטופולוגיה הנוצרת על־ידי קבוצות הבסיס מהצורה

$$B_C(f,\varepsilon) = \{g \in Y^X \ : \ \sup_{x \in C} d(f(x), f(y)) < \varepsilon\}$$

כאשר $\varepsilon > 0$, $f \in Y^X$, $C \subseteq X$ קומפקטית.

**טענה 39:** סדרת פונקציות $f_n \in Y^X$ מתכנסת לפונקציה גבולית $f$ בטופולוגיה זו אס"ם לכל קומפקטית $C \subseteq X$, $f_n|_C \to f$ במידה שווה, $\sup_{x \in C} d(f_n(x), f(x)) \to 0$.

**טענה 40:** כש־$Y$ מרחב מטרי, טופולוגיית ההתכנסות במידה שווה על קומפקטית על $C(X,Y)$ (כלומר, הטופולוגיה המושרה) מתלכדת עם הטופולוגיה הקומפקטית־פתוחה.

**טענה 41:** במקרה ש־$X$ קומפקטי ו־$Y$ מטרי, טופולוגיה זו על $C(X,Y)$ מטריזבילית ומתקבלת מהמטריקה האוניפורמית, הנתונה על־ידי $d_{\sup}(f,g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)) < \infty$.

נסמן $C(X) = C(X,\mathbb{R})$.

ויירשטראס הוכיח ב־1885 את **משפט הקירוב**: הפולינומים הם קבוצה צפופה ב־$C([0,1])$ בטופולוגיית ההתכנסות במידה שווה. כלומר, לכל פונקציה ממשית רציפה $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיים פולינום $p : [0,1] \to \mathbb{R}$ כך ש־$\sup_{0 \le x \le 1} |f(x) - p(x)| < \varepsilon$. ב־1937, סטון הכליל את המשפט למרחבים טופולוגיים כלליים:

**משפט 42 (סטון־ויירשטראס):** $X$ מרחב טופולוגי קומפקטי ו־$A \subseteq C(X)$ קבוצה של פונקציות רציפות המקיימות את התנאים הבאים –

1. $A$ היא אלגברה, כלומר סגורה תחת חיבור, כפל וכפל בסקלר (ומקיימת תכונות נוספות שאין צורך להזכיר כי כל הפונקציות הרציפות מקיימות);
2. $A$ מפרידה את נקודות $X$, כלומר לכל $x \neq y \in X$ קיימת $f \in A$ כך ש־$f(x) \neq f(y)$;
3. $A$ מכילה את הפונקציות הקבועות;

– אז $A$ צפופה ב־$C(X)$, כלומר $\overline{A} = C(X)$ בטופולוגיית ההתכנסות במידה שווה.

[30] בניגוד לטופולוגיית ההתכנסות הנקודתית, כאן פונקציות צריכות להיות קרובות ל־$f$ גם בסביבה קומפקטית של ה־$x_i$־ים.

**הוכחה.** נשים לב שמהנחות המשפט נובע שאם $f \in A$ אזי גם $1, f, f^2, f^3, \ldots \in A$ ולכן גם כל צירוף לינארי $a_0 + a_1 f + \ldots + a_n f^n \in A$, כלומר לכל פולינום ממשי $p$, $p(f) = p \circ f \in A$.

תחילה נראה שלכל $f \in A$ גם $|f| \in \overline{A}$: מכיוון ש־$f$ רציפה על כל מרחב קומפקטי $X$, היא חסומה, כלומר $f : X \to [-M, M]$ עבור $M$ כלשהו. נניח שהראינו שאת הפונקציה $x \mapsto |x|$ ניתן לקרב במידה שווה על־ידי פולינומים בקטע $[-M, M]$ (מיד נראה זאת). אז אם $p$ פולינום שמקרב את $x \mapsto |x|$ עד־כדי $\varepsilon > 0$ בקטע זה, מקבלים

$$\sup_{x \in X} |p(f(x)) - |f(x)|| \le \sup_{y \in [-M,M]} |p(y) - |y|| < \varepsilon$$

כלומר, $p \circ f \in A$ מקרבת את $|f|$. זה לכל $\varepsilon > 0$, ולכן $|f| \in \overline{A}$. כמסקנה, נקבל שאם $f, g \in \overline{A}$, אז גם $\max(f, g) = \frac{1}{2}(|f + g| + |f - g|)$, $\min(f, g) = \frac{1}{2}(|f + g| - |f - g|)$ ב־$\overline{A}$.

שנית, נראה שלכל $f \in C(X)$, $x \in X$ ו־$\varepsilon > 0$ קיימת פונקציה $g_x \in \overline{A}$ כך ש־$g_x \le f + \varepsilon$ (על כל $X$) וכך ש־$g_x(x) \ge f(x)$.

הבנייה: לכל $x \ne y \in X$ קיימת פונקציה $h_{xy} \in A$ כך ש־$h_{xy}(x) = f(x) + \frac{\varepsilon}{2}$, $h_{xy}(y) = f(x) - \frac{\varepsilon}{2}$ (לוקחים צירוף לינארי עם מקדמים מתאימים של פונקציה שמפרידה בין $x$ ל־$y$ והפונקציה 1).

נגדיר קבוצה $U_{xy} = \{z \in X \ : \ h_{xy}(z) < f(x) + \varepsilon\} = (h_{xy} - f)^{-1}((-\infty, \varepsilon))$. (לפי ההגדרה, $x, y \in U_{xy}$.) זו קבוצה פתוחה: תמונה הפוכה על־ידי פונקציה רציפה של קבוצה פתוחה.

נשים לב ש־$\{U_{xy}\}_{y \in X \setminus \{x\}}$ כיסוי פתוח של $X$. נוציא לו תת־כיסוי סופי $U_{xy_1}, \ldots, U_{xy_n}$. נגדיר $g_x = \min(h_{xy_1}(x), \ldots, h_{xy_n}(x)) \in \overline{A}$. מהבנייה מתקיים

$$f(x) + \varepsilon \ge g_x(x) = \min(h_{xy_1}(x), \ldots, h_{xy_n}(x)) = f(x) + \tfrac{\varepsilon}{2} \ge f(x)$$

וכן לכל $z \ne x$,

$$g_x(z) = \min(h_{xy_1}(z), \ldots, h_{xy_n}(z)) \le h_{xy_i}(z) < f(x) + \varepsilon$$

לפי הגדרת $U_{xy_i}$ ל־$i$ עבורו $z \in U_{xy_i}$.

לבסוף, נראה שלכל $f \in C(X)$ ו־$\varepsilon > 0$ קיימת $g \in \overline{A}$ כך ש־$f \le g \le f + \varepsilon$ על כל $X$. זה יסיים את ההוכחה (מלבד החלק עם $x \mapsto |x|$). לכל $x \in X$, תהא $V_x \subseteq X$ הקבוצה הפתוחה המוגדרת על־ידי $V_x = \{z \ : \ g_x(z) > f(x)\}$ כאשר $g_x$ הפונקציה שהגדרנו לעיל. $V_x$ מכילה את $x$ כי $g_x(x) = f(x) + \frac{\varepsilon}{2} > f(x)$. לכן $\{V_x\}_{x \in X}$ כיסוי פתוח של $X$. נוציא תת־כיסוי סופי של $V_{x_1}, \ldots, V_{x_n}$ ונגדיר $g = \max(g_{x_1}, \ldots, g_{x_n})$. אז $g > f$ על כל $V_{x_i}$ ולכן על כל $X$, ומכיוון ש־$g_x < f + \varepsilon$ על כל $X$, גם $g < f + \varepsilon$ על כל $X$, כלומר $g$ מקיימת את הנדרש.

לסיום, נוכיח שאפשר לקרב את $x \mapsto |x|$ על־ידי פולינומים ב־$[-M, M]$. מספיק לבדוק זאת ב־$[-1, 1]$ (תרגיל).

$$|x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{1 + (x^2 - 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (x^2 - 1)^k$$

(פיתוח לטור חזקות לפי הבינום של ניוטון). טור זה מתכנס במידה שווה על $[-1, 1]$ כי הוא נשלט על־ידי הטור המתכנס $\sum \binom{\frac{1}{2}}{k} = (1+1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$: כלומר, לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N$ כך שהפולינום $\sum_{k=0}^{N} \binom{\frac{1}{2}}{k} (x^2 - 1)^k$ מקרב את $x \mapsto |x|$ עד־כדי $\varepsilon$.

# 3 מבוא לטופולוגיה אלגברית

## 3.1 שמורות

**הבעיה:** איפיון מרחבים טופולוגיים עד־כדי הומיאומורפיזם. בדרך כלל קל להראות ששני מרחבים הומיאומורפיים, אבל קשה להראות שלא. 16.7.2008

**הרעיון:** להגדיר אינווריאנטים (שמורות).

אינווריאנט טופולוגי

**הגדרה. אינווריאנט טופולוגי** (או **שמורה טופולוגית**) הוא תכונה או פרמטר של המרחב שאינו משתנה תחת הומיאומורפיזם.

**דוגמה.** קשירות, קשירות מסילתית, קומפקטיות, תכונות ההפרדה, מימד[31] ועוד.

אינווריאנט מאפשר להפריד בין טיפוסי הומיאומורפיזם[32]: ברגע שהאינווריאנט נותן ערך שונה על שני המרחבים, יודעים שהם אינם הומיאומורפיים.

תכונות רצויות מאינווריאנט: קל לחשב אותו; מפריד בין הרבה מרחבים (הוא ״חזק״).[33]

בטופולוגיה אלגברית, מגדירים אינווריאנטים בעלי אופי אלגברי: חבורות, חוגים, מרחבים וקטוריים, אלגברות, מודולים וכו׳.

האינווריאנטים הבסיסיים: חבורות הומוטופיה ($X \mapsto \pi_1(X), \pi_2(X), \dots$ – סדרת חבורות שהולכות ונעשות מורכבות יותר ויותר) וחבורות הומולוגיה (שמסומנות ב־$H_i(X)$).

## 3.2 $\pi_1(X)$, החבורה היסודית

לפני שנגדיר – שימושים לדוגמה:

1. יכולת להפריד בין מרחבים;
2. **המשפט היסודי של האלגברה:** לכל פולינום מרוכב יש שורש מרוכב. (גאוס הוכיח זאת על־ידי טיעון של טופולוגיה אלגברית.)
3. **משפט נקודת השבת של בראוור:** לכל $f : D^n \to D^n$ רציפה יש נקודת שבת, כלומר נקודה $x \in D^n$ כך ש־$f(x) = x$.

### 3.2.1 הומוטופיה

רוב האינווריאנטים בטופולוגיה אלגברית אינווריאנטים ל״שקילות הומוטופית״, שהיא שקילות הרבה יותר חלשה מהומיאומורפיזם (לדוגמה, $\mathbb{R}^n$ שקול הומוטופית לנקודה בודדת, אף שהם אינם הומיאומורפיים).

[31] זהו מושג שלא נגדיר בקורס זה.

[32] אינטואיטיבית, מעין ״מחלקות שקילות״ תחת יחס ההומיאומורפיזם.

[33] כדי שאינווריאנט יהיה חזק יותר, רצוי שייתן ערכים על פני מרחב גדול יותר. כך, למשל, מימד ״חזק״ יותר מהתכונות הבינאריות שעסקנו בהן.

**הגדרה.** יהיו $X$ ו־$Y$ מרחבים טופולוגיים ו־$f, g : X \to Y$ שתי פונקציות רציפות. נגיד ש־$f$ **הומוטופית** ל־$g$ אם קיימת העתקה רציפה $F : [0,1] \times X \to Y$ כך ש־$F(0,x) = f(x)$ ו־$F(1,x) = g(x)$ לכל $x \in X$. $F$ כזו נקראת **הומוטופיה** בין $f$ ל־$g$.[34] הומוטופיה

**טענה 43 (קלה):** הומוטופיה היא יחס שקילות על $C(X,Y)$.

**הוכחה.** רפלקסיביות: $f \sim f$ – נגדיר $F : [0,1] \times X \to Y$ על־ידי $F(t,x) = f(x)$, וזוהי הומוטופיה.

סימטריות: אם $g \sim f$, קיימת הומוטופיה $F$ מ־$f$ ל־$g$; נגדיר הומוטופיה מ־$g$ ל־$f$ על־ידי $G(t,x) = F(1-t,x)$.

טרנזיטיביות: אם $F$ הומוטופיה מ־$f$ ל־$g$ ו־$G$ הומוטופיה מ־$g$ ל־$h$, נגדיר הומוטופיה מ־$f$ ל־$g$ $H : I \times X \to Y$ על־ידי

$$H(t,x) = \begin{cases} F(2t,x) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ G(2t-1,x) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

21.7.2008 **הגדרה.** מרחבים טופולוגיים $X$ ו־$Y$ נקראים **שקולים הומוטופית** אם קיימות פונקציות רציפות $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ כך ש־$f \circ g \sim id_Y$, $g \circ f \sim id_X$.

שקילות הומוטופית רפלקסיבית, סימטרית וטרנזיטיבית. רפלקסיביות וסימטרייה – ברור; בשביל טרנזיטיביות:

**טענה 44:** אם $f, f' : X \to Y$ הומוטופיות ו־$g, g' : Y \to Z$ הומוטופיות, אז $g \circ f \sim g' \circ f'$.

**הוכחה.** אם $F : I \times X \to Y$ ההומוטופיה בין $f$ ל־$f'$ – $F(0,x) = f(x)$, $F(1,x) = f'(x)$, ו־$G$ ההומוטופיה בין $g$ ל־$g'$ (נסמן $g \overset{G}{\sim} g'$), נגדיר $K : I \times X \to Z$ על־ידי $K(t,x) = G(t, F(t,x))$: זו הומוטופיה בין $g \circ f$ ל־$g' \circ f'$.

בדיקת הטרנזיטיביות: $X \cong Y \cong Z$, כלומר קיימות פונקציות $f \circ f' \sim id_Y$, $f' \circ f \sim id_X$, $g \circ g' \sim id_Z$, $g' \circ g \sim id_Y$. אבל אז

$$f' \circ g' \circ g \circ f = f' \circ (g' \circ g) \circ f \sim f' \circ id_Y \circ f = f' \circ f \sim id_X$$

(הרכבת פונקציה על שתי פונקציות הומוטופיות נותנת שתי פונקציות הומוטופיות), ובאופן דומה $g \circ f \circ f' \circ g' \sim id_Z$. לכן $X \cong Z$.

אם שני מרחבים טופולוגיים הם הומיאומורפיים הם בוודאי שקולים הומוטופית.

## 3.3 טיפוסי הומוטופיה

טיפוס ההומוטופיה של מרחב הוא "מחלקת השקילות" שלו תחת יחס השקילות ההומוטופית. איפיון מרחבים עד כדי שקילות הומוטופית זו בעיה מאוד מעניינת, שלענות עליה מאוד כיף.[35]

[34] באופן שקול, בערך, הומוטופיה היא מסלול רציף ב־$C(X,Y)$ המחבר בין $f$ ל־$g$ כאשר מציבים את $C(X,Y)$ בטופולוגיה מתאימה. (כדי להגדיר את הטופולוגיה צריך להניח הנחות נוספות על $X$ ועל $Y$; לכן זה לא כללי באותה מדי.)

[35] לאנשים מסויימים, מכל מקום.

טיפוס ההומוטופיה הפשוט ביותר: מרחב עם נקודה אחת.

מרחב כוויץ **הגדרה.** מרחב ששקול הומוטופית למרחב עם נקודה אחת נקרא **כוויץ** (contractible). באופן שקול, מרחב $X$ הוא כוויץ אם $id_X$ הומוטופית להעתקה קבועה $f \equiv x_0$ עבור איזשהו $x_0 \in X$.

**דוגמה.** $\{0\}$ כוויץ; $[0,1]$ כוויץ: $F(t,x) = (1-t)x$ (כש־$t = 0$, זו פונקציית הזהות; כש־$t = 1$, זו ההעתקה הקבועה 0); $(0,1) \cong \mathbb{R}$ כוויץ; $\mathbb{R}^n$ כוויץ; כל קבוצה קמורה[36] ב־$\mathbb{R}^n$ היא כוויצה.

$S^1$ לא כוויצה - נוכיח זאת; $S^n$ ל־$n > 1$ לא כוויצה - לא נוכיח זאת.[37]

**משפט 45 (נקודת השבת של בראוור):** לכל פונקציה רציפה $f : D^n \to D^n$ יש נקודת שבת.

למשפט נקודת השבת של בראוור יש הרבה שימושים; בין השאר, בעזרתו מוכיחים כי בכל משחק בשני שחקנים יש שיווי־משקל נאש.[38]

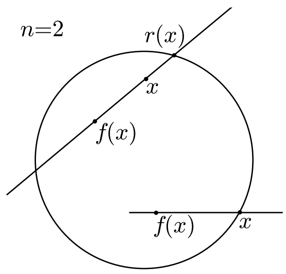
רטרקט אם $X$ מרחב טופולוגי ו־$A \subseteq X$, פונקציה רציפה $r : X \to A$ נקראת **רטרקט** (retract) של $X$ לתוך $A$ אם $r\mid_A \equiv id_A$.

**משפט 46:** הטענות הבאות שקולות:[39]

1. $S^{n-1}$ לא כוויצה;
2. לא קיים רטרקט $r : D^n \to S^{n-1}$;
3. משפט בראוור נכון ב־$n$ מימדים.

**הוכחה.** ((1) ⇐ (2)) נניח שקיים רטרקט $r : D^n \to S^{n-1}$ ונראה ש־$S^{n-1}$ כוויצה. $D^n$ כן כוויצה, באופן טריוויאלי (למשל, ניקח $F : I \times D^n \to D^n$ המוגדרת על־ידי $F(t,x) = (1-t)x$). נגדיר $G : I \times S^{n-1} \to S^{n-1}$ על־ידי $G(t,x) = r(F(t,x)) \in D^n$. היא רציפה ומקיימת עבור $x \in S^{n-1}$, $G(0,x) = r(F(0,x)) = r(x) = x$, $G(1,x) = r(F(1,x)) \equiv r(0)$.

((2) ⇐ (3)) נניח שקיימת פונקציה רציפה $f : D^n \to D^n$ ללא נקודת שבת ונראה שקיים רטרקט $r : D^n \to S^{n-1}$. נגדיר את $r$ לפי הציור:




[36] קבוצה קמורה מכילה את הקטע המחבר בין כל שתי נקודות בה.

[37] זו מסקנה לא קשה של תורת ההומולוגיה.

[38] כאן צונזרה פרסומת סמויה לקורס שד"ר רומיק יעביר בתורת המשחקים בסמסטר הבא.

[39] בפרט, באופן מעניין, הטענות הכה־שליליות (1) ו־(2) שקולות לטענה (3), שהיא חיובית למדי.

(זה מוגדר כי $x \neq f(x)$ לכל $x$.) היא רציפה ומקיימת $r(x) = x$ לכל $x \in S^{n-1}$.

((3) $\Leftarrow$ (2)) בהינתן רטרקט $r : D^n \to S^{n-1}$, נגדיר פונקציה $f : D^n \to D^n$ על־ידי $f(x) = -r(x)$. אז לכל $x \in S^{n-1}$, $f(x) = -r(x) = -x \neq x$, כלומר ל־$f$ אין נקודת שבת.

((2) $\Leftarrow$ (1)) צריך להראות שאם הספירה כוויצה אז קיים רטרקט. תחילה, נזהה את $D^n$ עם המרחב $I \times S^{n-1}/\{1\} \times S^{n-1}$ – החרוט מעל $S^{n-1}$.[40]

פורמלית, נגדיר העתקה $\overline{h} : I \times S^{n-1} \to D^n$ על־ידי $\overline{h}(t,x) = (1-t)x$. העתקה זו מכבדת את יחס השקילות על $I \times S^{n-1}$ המזהה את $\{1\} \times S^{n-1}$ לנקודה בודדת, ולכן היא מתפקטרת דרך העתקת המנה $\pi : I \times S^{n-1} \to I \times S^{n-1}/\sim$. כלומר, קיימת העתקה $h : I \times S^{n-1}/\sim \to D^n$ כך ש־$\overline{h} = h \circ \pi$. קל לבדוק שהיא הומיאומורפיזם.

כעת, אם $S^{n-1}$ כוויצה, תהי $\overline{F} : [0,1] \times S^{n-1} \to S^{n-1}$ הומוטופיה בין $id_{S^{n-1}}$ להעתקה קבועה $x_0$, כלומר $\overline{F}(1,x) = x_0$ לכל $x \in S^{n-1}$. אז $\overline{F}$ מכבדת את יחס השקילות שהגדרנו, שמזהה את $\{1\} \times S^{n-1}$ לנקודה, ולכן גם היא מתפקטרת דרך $\pi$, כלומר קיימת העתקה $F : I \times S^{n-1}/\sim \to S^{n-1}$ כך ש־$\overline{F} = F \circ \pi$.

כעת נגדיר $r : D^n \to S^{n-1}$ על־ידי $r(x) = F(h^{-1}(x))$ – רציפה, ולכל $x \in S^{n-1}$ מתקיים $r(x) = F(0,x) = x$.

### 3.3.1 החבורה היסודית

23.7.2008 החבורה היסודית – ניסיון למדוד "חורים" במרחב.

**הגדרה. לולאה** במרחב טופולוגי $X$ עם בסיס ב־$x_0$ היא העתקה רציפה $\Phi : [0,1] \to X$ כך ש־$\varphi(0) = \varphi(1) = x_0$. (באופן שקול, זו העתקה רציפה $\Phi : S^1 \to X$ כך ש־$\Phi(1,0) = x_0$.)

נסמן $\Phi : (I,0) \to (X,x_0)$.

שתי לולאות $\Phi, \Phi' : (I,0) \to (X,x_0)$ עם בסיס ב־$x_0 \in X$ נקראות **הומוטופיות** (במובן של לולאות עם בסיס) אם קיימת $F : I \times I \to X$ רציפה כך ש־$F(0,s) = \Phi(s)$, $F(1,s) = \Phi'(s)$ לכל $s \in [0,1]$ וכן $F(t,0) = F(t,1) = x_0$ לכל $t \in [0,1]$.

זה יחס שקילות על מרחב הלולאות ב־$X$ עם בסיס ב־$x_0$ (תת־מרחב של $C(I,X)$); אותה הוכחה כמו קודם.

**הגדרה (תזכורת). חבורה** (group) היא קבוצה $G$ יחד עם פעולת כפל $\cdot : G \times G \to G$ המקיימת (א) אסוציאטיביות: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ לכל $a,b,c \in G$; (ב) קיום איבר נייטרלי: $e \in G$ כך שלכל $a \in G$, $a \cdot e = e \cdot a = a$; (ג) קיום איבר הפכי: לכל $a \in G$ קיים איבר $b \in G$ כך ש־$a \cdot b = b \cdot a = e$. מסמנים $b = a^{-1}$ (קל להראות יחידות).

**דוגמה.** $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ – חבורות עם פעולת החיבור; $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$ – חבורה עם פעולת הכפל. אלה חבורות קומוטטיביות (אבליות), כלומר מקיימות $a \cdot b = b \cdot a$.

[40] באופן כללי, אם $X$ מרחב טופולוגי, אז $I \times X/\{1\} \times X$ נקרא **החרוט מעל** $X$.

**דוגמה.** הפונקציות ההפיכות $f : X \to X$ כאשר $X$ קבוצה כלשהי, עם פעולת ההרכבה: $f \cdot g = f \circ g$. זו אינה חבורה קומוטטיבית.

**דוגמה.** מטריצות מסדר $n \times n$ הפיכות מעל שדה $\mathbb{F}$, עם כפל מטריצות. גם זו אינה חבורה קומוטטיבית.

**הגדרה.** אם $G$ ו־$H$ חבורות, אז העתקה $\Phi : G \to H$ תיקרא **הומומורפיזם** אם $\Phi$ שומרת על פעולת הכפל, כלומר $\Phi(a \cdot b) = \Phi(a) \cdot \Phi(b)$ לכל $a, b \in G$.

$\Phi : G \to H$ היא **איזומורפיזם** אם היא הפיכה (כפונקציה) והיא הומומורפיזם.

החבורה היסודית

**הגדרה (חשובה).** **החבורה היסודית** של $X$ עם בסיס ב־$x_0$ היא אוסף מחלקות ההומוטופיה של לולאות עם בסיס ב־$x_0$. היא תסומן ב־$\pi_1(X, x_0) = \pi(X, x_0)$. (כרגע זו קבוצה בלבד!)

ננסה להגדיר מבנה של חבורה על $\pi(X, x_0)$: אם $\Phi_1, \Phi_2 : (I, 0) \to (X, x_0)$ שתי לולאות עם בסיס ב־$x_0$, נגדיר לולאה מבוססת חדשה $\Psi : (I, 0) \to (X, x_0)$ על־ידי

$$\Psi(s) = \begin{cases} \Phi_1(2s) & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \Phi_2(2s-1) & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

פעולה זו אמנם איננה מקיימת אף אחד מתנאי הכפל בחבורה, אבל עבור מחלקות ההומוטופיה, נגדיר $[\Phi_1] \cdot [\Phi_2] = [\Psi]$.

**טענה 47:** (1) פעולת הכפל מוגדרת היטב: אינה תלויה בנציגים אלא רק במחלקות ההומוטופיה. 28.7.2008

(2) זה מגדיר מבנה של חבורה על $\pi_1(X, x_0)$.

**הוכחה.** (1) צריך להראות שאם $a \sim a'$ שתי לולאות הומוטופיות עם בסיס ב־$x_0$ ו־$b \sim b'$ כנ״ל, אז $\Psi$ שמתאימה ל־$a \cdot b$ הומוטופית ל־$\Psi'$ שמתאימה ל־$a' \cdot b'$.

פורמלית, אם $F$ הומוטופיה בין $a$ ל־$a'$ ו־$G$ הומוטופיה בין $b$ ל־$b'$, נגדיר $H : I \times I \to X$ על־ידי

$$H(t, s) = \begin{cases} F(t, 2s) & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ G(t, 2s-1) & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

קל לראות ש־$H$ היא הומוטופיה בין $a \cdot b$ ל־$a' \cdot b'$.

(2) אסוציאטיביות: צריך להראות $([a] \cdot [b]) \cdot [c] = [a] \cdot ([b] \cdot [c])$.

איבר נייטרלי: נסמן ב־$e$ את הלולאה הקבועה $x_0$. צריך להראות $[a] \cdot [e] = [e] \cdot [a] = [a]$.

פורמלית, נגדיר

$$F(t, s0) = \begin{cases} a(\frac{s}{\frac{1}{2}(1-t)+t} & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ x_0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

.

קיום איבר הפכי: צריך למצוא $[a]^{-1}$ כך ש־$[a] \cdot [a]^{-1} = [e]$. נגדיר את המסלול ההפוך $a^{-1}(s) = a(1-s)$.

### 3.3.2 תכונות של $\pi_1$

1. $\pi_1(X,x_0)$ תלויה רק ברכיב הקשירות המסילתית של $x_0$; לכן בדרך־כלל נניח ש־$X$ קשיר מסילתית.
2. אם נניח ש־$X$ קשיר מסילתית, אז נדמה ש־$\pi(X,x_0)$ תלויה בנקודת הבסיס $x_0$. למעשה זה לא נכון, כי –

**טענה 48:** אם $x_1$ נקודת בסיס אחרת, אז קיים איזומורפיזם $J:\pi(X,x_0)\to\pi(X,x_1)$ הנתון על־ידי $[\Phi]=[\Psi]\cdot[J(\Phi)]\cdot \iff J([\Phi])=[\Psi]^{-1}\cdot[\Phi]\cdot[\Psi]=[\Psi^{-1}\cdot\Phi\cdot\Psi]$ $[\Psi^{-1}]$. (בדיקה שהומומורפיזם – כתרגיל.)

הערה: כמסקנה, אם $X$ קשיר מסילתית, לפעמים נסמן $\pi(X)$ במקום $\pi(X,x_0)$.

3. $\pi(X)$ הוא אינווריאנט תחת שקילות הומוטופית, ובפרט אינווריאנט טופולוגי.

**הוכחה.** באופן יותר כללי, אם $f:X\to Y$ רציפה, אז $f$ מגדירה הומומורפיזם של חבורות $f_*=\pi(X,x_0)\to\pi(Y,y_0)$, $y_0=f(x_0)$, המוגדר על־ידי $f_*([\Phi])=[f\circ\Phi]$.
כתרגיל: זה מוגדר היטב, זה הומומורפיזם ומתקיים שאם $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$, אז $(g\circ f)_*=g_*\circ f_*$, וגם $(id_X)_*=id_{\pi(X,x_0)}$. (כלומר, ההתאמה $X\mapsto\pi(X)$ היא **פונקטור**.[41])

האינווריאנטיות לשקילות הומוטופית של מרחבים נובעת מיידית: אם $X\overset{H}{\equiv}Y$, כלומר קיימות $f:X\to Y$ ו־$g:Y\to X$ כך ש־$g\circ f\sim id_X$ ו־$f\circ g\sim id_Y$, אז $f_*:\pi(X,x_0)\to\pi(Y,y_0)$, $g_*:\pi(Y,y_0)\to\pi(X,x_0)$ הומומורפיזמים הפכיים זה לזה. $g_*\circ f_*=(g\circ f)_*=(id_X)_*=id_{\pi(X,x_1)}\cong id_{\pi(X,x_0)}$, וכן $f_*\circ g_*=id_{\pi(Y)}$.

4. מסקנה מ־3: למרחב כוויץ $X$ יש חבורה יסודית טריוויאלית $\pi(X)\cong\{0\}$.

**הגדרה.** מרחב עם חבורה יסודית טריוויאלית נקרא **פשוט־קשר** (simply connected).

כלומר, מרחב הוא פשוט־קשר אם כל לולאה בו הומוטופית ללולאה קבועה ("כל לולאה בו ניתן לכווץ לנקודה").
כל מרחב כוויץ הוא פשוט קשר, אך לא כל מרחב פשוט קשר הוא כוויץ (למשל, $S^n$, $n\geq 2$).

## 3.4 החבורה היסודית של $S^1$

המטרה – להוכיח **משפט:** $\pi(S^1)\cong\mathbb{Z}$.

בפרט, זה יוכיח ש־$S'$ אינו כוויץ, ולכן, לפי מה שכבר הוכחנו, גם ש־$S^1$ אינו רטרקט של $D^2$ ושמשפט בראוור נכון בש־2 מימדים.

**למה 49 (ההרמה (lifting) הראשונה):** אם $\Phi:[0,1]\to S^1$ מסלול רציף (לאו דווקא סגור), אז קיימת פונקציית זווית רציפה $\overline{\Phi}:[0,1]\to\mathbb{R}$ עבור $\Phi$, כלומר פונקציה המקיימת $\Phi(t)=(\cos\overline{\Phi}(t),\sin\overline{\Phi}(t))$ לכל $t$. $\overline{\Phi}$ יחידה עד־כדי בחירת הזווית בזמן 0, כלומר אם קובעים את $\overline{\Phi}(0)$

[41] ד"ר רומיק מקווה עבורנו שלא נלמד על זה אף פעם.

אז $\overline{\Phi(t)}$ נקבע לכל $t$, ואז כל פונקציית זוית אחרת היא מהצורה $\overline{\Phi}(t)+2\pi k$ עבור איזשהו $k\in\mathbb{Z}$ קבוע.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "s\mapsto(\cos s,\sin s)"] \\ {[0,1]} \arrow[ur, dashed, "\overline{\Phi}"] \arrow[r, "\Phi"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

**הוכחה.** ראשית, היחידות: אם $\overline{\Phi}_1$ ו־$\overline{\Phi}_2$ שתי הרמות של $\Phi$ כנ"ל, אז $\frac{\overline{\Phi}_1(t)-\overline{\Phi}_2(t)}{2\pi}$ פונקציה רציפה על $I$ המקבלת ערכים שלמים, לכן קבועה. 30.7.2008

קיום: אפשר לבנות פונקציית זוית באופן מקומי: כלומר, לכל $t\in I$ קיימת סביבה פתוחה $t\in U\subseteq[0,1]$ כך שקיימת פונקציית זוית $\Phi_U:U\to\mathbb{R}$ המקיימת $p\circ\overline{\Phi}_U=\Phi\mid_U$ (מספיק לקחת סביבה $U$ של $t$ כך ש־$\Phi(U)$ מוכלת בגזרה בעלת זוית $180^\circ$ סביב $\Phi(t)$).

כעת נגדיר $t_*=\sup\{t\in[0,1]\ :\ \Phi\mid_{[0,t]}\text{ ניתן לבנות הרמה ל־}\}$.

לפי ההערה למעלה, $t_*>0$. נוכיח ש־$t_*=1$. אם $t_*<1$, קיימת סביבה $t_*\in(a,b)\subseteq I$ כך שיש פונקציית זוית על $\Phi\mid_{(a,b)}$. עבור איזשהו $a<a'<t_*$, לפי הגדרת $t_*$, קיימת פונקציית זוית ל־$\Phi\mid_{(a,a')}$. אפשר לסדר ששתי פונקציות זוית אלו יסכימו על $a'$, ולכן לפי אותו שיקול מהוכחת היחידות, מסכימות על $(a,a')$. לכן אפשר להגדיר פונקציית זוית על $[0,b]$ על־ידי הדבקת שתי הפונקציות, בסתירה להנחה ש־$t_*<1$.

סביב $t=1$ גם ניתן לבנות פונקציית זוית באופן מקומי: $\overline{\Phi}_{(1-\varepsilon,1]}$, ושוב נדביק אותה עם פונקציית זוית $\overline{\Phi}_{[0,1-\frac{\varepsilon}{2}]}$ (אחרי שמסדרים שיתלכדו בתחום ההגדרה המשותף) ונקבל הרמה ל־$\Phi$.

**הגדרה.** אם $\Phi:(I,0)\to(S',x_0)$ לולאה עם בסיס, תהי $\overline{\Phi}:I\to\mathbb{R}$ פונקציית זוית שלה. 28.7.2008
המספר $\deg(\Phi)=\frac{\overline{\Phi}(1)-\overline{\Phi}(0)}{2\pi}$ הוא מספר שלם שייקרא **הדרגה** או **האינדקס** של $\Phi$. (זה לא תלוי בבחירת פונקציית הזוית.)

**טענה 50:** $\deg(\Phi)$ תלויה רק במחלקת ההומוטופיה של $\Phi$ (ללולאות עם בסיס), כלומר אפשר לכתוב $\deg([\Phi])$. 30.7.2008

זה נובע מהלמה הבאה:

**למה 51 (ההרמה השנייה):** אם $\Phi_1,\Phi_2:(I,0)\to(S',x_0)$ והן הומוטופיות $\Phi_1\overset{F}{\sim}\Phi_2$, אז לכל הרמה $\overline{\Phi}_1:(I,0)\to\mathbb{R}$ של $\Phi_1$ יש הרמה של העתקת ההומוטופיה $F$ בין $\Phi_1$ ל־$\Phi_2$.

**הוכחה.** אחר־כך.

**משפט 52:** $\pi(S^1)\cong\mathbb{Z}$.

**הוכחה.** הדרגה $\deg$ היא העתקה $\deg:\pi_1(S^1,x_0)\to\mathbb{Z}$. נראה שהיא איזומורפיזם של חבורות.
קל לראות שהיא הומומורפיזם, כי

$$\begin{aligned}\deg(\Phi_1\cdot\Phi_2) &= \frac{(\overline{\Phi_1\cdot\Phi_2})(1)-(\overline{\Phi_1\cdot\Phi_2})(0)}{2\pi}\\ &= \frac{(\overline{\Phi}_1(1)-\overline{\Phi}_1(0))+(\overline{\Phi}_2(1)-\overline{\Phi}_2(0))}{2\pi}\\ &= \deg(\Phi_1)+\deg(\Phi_2)\end{aligned}$$

זו העתקה על $\mathbb{Z}$, כי אם $k\in\mathbb{Z}$ אז הלולאה $t\mapsto(\cos(2\pi kt+\alpha_0),\sin(2\pi kt+\alpha_0))$ היא עם דרגה $k$.

נותר להראות ש־$\deg$ פונקציה חד־חד ערכית. כלומר, אם $\Phi_1$ ו־$\Phi_2$ לולאות שעבורן מתקיים $\deg(\Phi_1)=\deg(\varphi_2)$, אז $\Phi_1\sim\Phi_2$. תהי $\overline{\Phi}_1$ הרמה של $\Phi$ ותהי $\overline{\Phi}_2$ הרמה של $\Phi_2$ עם אותה נקודת התחלה $\overline{\Phi}_2(0)=\overline{\Phi}_1(0)$ כמו ל־$\overline{\Phi}_1$. לפי ההנחה ש־$\deg(\Phi_1)=\deg(\Phi_2)$, נובע שגם נקודת הסיום $\overline{\Phi}_1(1)=\overline{\Phi}_2(1)$ זהות. נבנה הומוטופיה $\overline{F}:I\times I\to\mathbb{R}$ בין $\overline{\Phi}_1$, $\overline{\Phi}_2$ השומרת על נקודות הקצה על־ידי שנגדיר $F(t,s)=(1-t)\overline{\Phi}_1(s)+t\overline{\Phi}_2(s)$ (אינטרפולציה לינארית) ונגדיר $F=p\circ\overline{F}$. אז $F$ הומוטופיה בין $\Phi_1$ ל־$\Phi_2$ (הומוטופיה של לולאות מבוססות, כלומר $F(t,0)=F(t,1)=x_0$ לכל $t$ – זה נכון כי $\overline{F}(t,0)=\overline{\Phi}_1(0)$, $\overline{F}(t,1)=\Phi_1(1)$ לכל $t$).

**מסקנה 53:** משפט נקודת השבת של בראוור בשני מימדים (ב־$D^2$). 4.8.2008

**מסקנה 54:** $R^2$ לא הומיאומורפי ל־$\mathbb{R}^n$ לכל $n\neq 2$.

**הוכחה.** $\mathbb{R}^2\setminus\{\text{point}\}$ שקול הומוטופית ל־$S^1$, ובפרט $\mathbb{R}^n\setminus\{\text{point}\}$ שקל הומוטופית ל־$S^{n-1}$, ולכן פשוט קשר.